

# Sari\_Saraswati\_Buku\_PDP\_full\_ 1.docx

*by*

---

**Submission date:** 17-Apr-2021 08:26AM (UTC+0700)

**Submission ID:** 1561482831

**File name:** Sari\_Saraswati\_Buku\_PDP\_full\_1.docx (1.58M)

**Word count:** 12294

**Character count:** 74680

# BAB 1

## PENDAHULUAN *BLENDED LEARNING*

### A. PENDAHULUAN

Pada bab pertama ini membahas tentang teori *blended learning*, apa itu *blended learning*, mengapa *blended learning* serta bagaimana penerapannya di kelas.

Tujuan merancang pembelajaran salah satunya adalah untuk memperbaiki serta meningkatkan kualitas dari suatu pembelajaran (Dwiyogo, 2018). Bentuk upaya yang bisa dilakukan yaitu dengan menerapkan variasi model pembelajaran, media serta bahan ajar yang baik.

Buku ini merupakan bagian dari hasil pengembangan *blended learning* dalam mata kuliah kalkulus dasar sebagai inovasi pembelajaran abad 21. Agar dapat menerapkannya dalam kelas, maka perhatikan penjelasan berikut.

### B. PENGERTIAN *BLENDED LEARNING*

Istilah *blended learning* pada mulanya muncul dari penggabungan pembelajaran tatap muka serta *online*. Pada saat ini banyak istilah *blended learning* semakin populer, terutama dengan adanya kondisi pandemic covid-19 yang berpengaruh sangat signifikan terhadap pendidikan baik di sekolah maupun perguruan tinggi.

Menurut Graham (2004) terdapat tiga istilah yang sering digunakan dalam memahami definisi *Blended Learning*, yaitu: 1) Kombinasi dari suatu strategi dalam pembelajaran (*combining instructional modalities or delivery media*), 2) Gabungan atau kombinasi dari metode

pembelajaran (*combining instructional methods*), dan 3) Kombinasi antara pembelajaran *online* dan tatap muka (*combining online and face-to-face instruction*).



**Gambar 1.1.** Pendekatan *Blended Learning*

Pelaksanaan *blended learning* memungkinkan penggunaan sumber belajar *online*, tanpa menghilangkan aktivitas tatap muka (Elliot, 2002:58). Adapun teknisnya dapat disajikan sebagai berikut:

1. *Online Learning* atau *E-learning*

Berdasarkan Waryanto (2006) memaparkan istilah *online learning*, *virtual learning*, *e-learning*, *internet-enabled learning*, atau *web based learning* suatau pengembangan dari pembelajaran jarak jauh yang menggunakan internet. Pembelajaran *online* adalah bagian dari aktivitas pembelajaran yang menggunakan suatu jaringan (internet, LAN, WAN) sebagai media penyampaian, komunikasi, interaksi dan fasilitasi yang mendukung berbagai bentuk layanan belajar lainnya (Waryanto, 2006).

2. *Pembelajaran Tatap muka (Face-to-face Learning)*

Pembelajaran tatap muka adalah aktivitas pembelajaran yang melibatkan interaksi langsung antara pendidik dan peserta didik atau mahasiswa (Husamah, 2014). Pada model *blended learning*, kegiatan pembelajaran tatap muka digunakan untuk melengkapi pembelajaran *online* dengan menerapkan

beberapa metode antara lain ceramah, kegiatan diskusi, metode tanya jawab, serta penugasan.

### 3. Belajar Mandiri (*Individualized Learning*)

Menurut Istiningsih & Hasbullah (2015) memaparkan bahwa belajar mandiri dalam *blended learning* adalah peserta didik atau mahasiswa dapat belajar mandiri di dalam kelas atau diluar kelas dengan cara mengakses materi, informasi, latihan soal, dan berbagai hal yang berhubungan dengan pelaksanaan pembelajaran *online* menggunakan internet.

## C. IMPLEMENTASI *BLENDED LEARNING*

Implementasi *blended learning* pada bab ini merupakan gabungan pembelajaran tatap muka dan pembelajaran *online*. Dalam mendukung pembelajaran *online*, maka digunakan salah satu *platform* yang tersedia secara bebas dan gratis yaitu Edmodo.

Kegiatan pembelajaran dengan *blended learning* ini telah dikembangkan pada mata kuliah Kalkulus Dasar. Kegiatan belajar dalam mata kuliah ini terdiri dari 3 kegiatan belajar, yaitu kegiatan belajar 1, kegiatan belajar 2, dan kegiatan belajar 3.

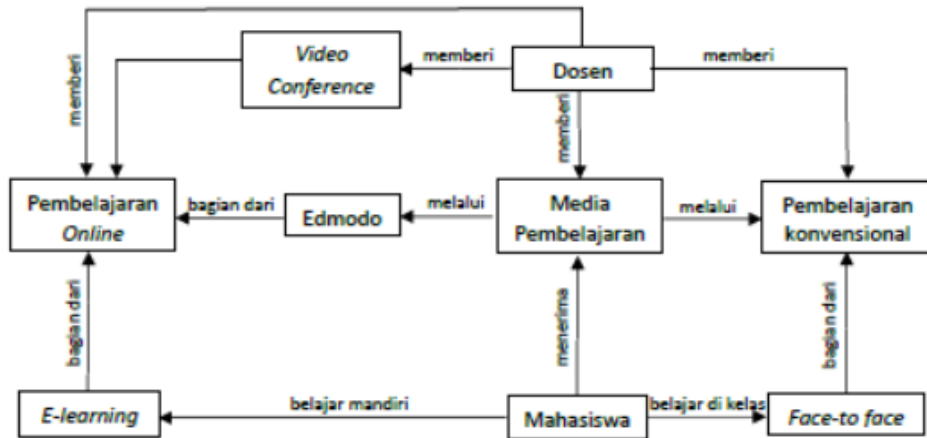
Pada kegiatan belajar pertama, mahasiswa diharapkan dapat menguasai materi tentang konsep dasar turunan, diferensial serta aproksimasi, kegiatan belajar 2 bertujuan untuk memahami dan menggunakan aturan pencarian turunan, serta kegiatan belajar 2 dikembangkan dengan tujuan agar mahasiswa menggunakan aturan rantai dan turunan tingkat tinggi dalam menyelesaikan permasalahan turunan yang kompleks.

Bahan ajar dalam pembelajaran *online* yang dikembangkan pada masing-masing kegiatan belajar meliputi *handout* dan video pembelajaran yang diposting pada laman Edmodo. Sedangkan Lembar Kerja Kelompok serta *Power Point* dikembangkan sebagai penunjang kegiatan tatap muka.

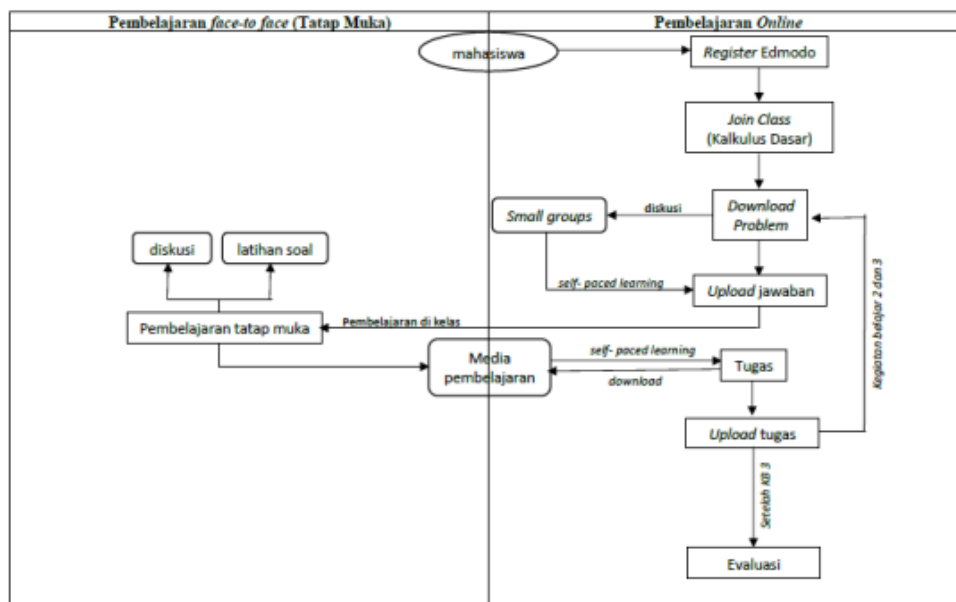
Pada awal setiap kegiatan belajar, mahasiswa diberikan soal *open ended* dengan tujuan untuk menggiring mahasiswa menuju

topik materi yang akan dibahas pada tatap muka. Setelah mengikuti pembelajaran tatap muka, mahasiswa dapat mengakses materi ajar serta latihan soal melalui Edmodo.

Adapun siklus penerapan *blended learning* disajikan pada gambar berikut.



**Gambar 1.2.** Konsep *blended learning*



**Gambar 1.3.** Alur *blended learning* berbasis Edmodo

# BAB 2

## PENGANTAR KALKULUS

### A. PENDAHULUAN

Bab ini membahas pengenalan tentang mata kuliah kalkulus dasar. Pada bab ini dijabarkan beberapa materi prasyarat sebelum mempelajari kalkulus dasar.

Materi pada bab ini sangat bermanfaat bagi mahasiswa pendidikan matematika sebagai calon pendidik. Mahasiswa diharapkan mampu memahami struktur bilangan real beserta sifat-sifatnya, pertidaksamaan, dan nilai mutlak.

Tujuan mempelajari bab ini adalah supaya mahasiswa dapat memahami materi prasyarat dalam mempelajari materi kalkulus terutama turunan, dan mahasiswa mampu mengaplikasikan dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kalkulus terutama turunan.

Materi dalam bab ini disusun sedemikian rupa agar mudah dipahami oleh mahasiswa. Kalian harus mulai mempelajari bab ini terlebih dahulu agar dapat memahami bab-bab berikutnya dengan baik. Pelajarilah definisi, teorema, serta kerjakan latihan soalnya agar kalian dapat lebih terampil.

### B. SISTEM BILANGAN REAL

Himpunan bilangan real mempunyai peranan yang sangat penting dalam kalkulus, karena kalkulus didasarkan pada sistem bilangan real dan sifat-sifatnya.

Kita telah mengenal himpunan-himpunan bilangan berikut ini :

1. Himpunan bilangan asli  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
2. Himpunan bilangan cacah  $C = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
3. Himpunan bilangan bulat  $B = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

4. Himpunan bilangan rasional  $Q$ , yaitu suatu himpunan yang anggota-anggotanya dapat ditulis sebagai  $p/q$ , dengan  $p$  dan  $q$  bilangan bulat dan  $q \neq 0$ .

Misalnya :  $2/3, (-7)/4, 2, 6/3, 8\frac{1}{2}, -10$

Jika  $p$  habis dibagi  $q$ , maka bilangan rasional adalah bilangan bulat. Misalnya :  $6/3, -5, 0, (-18)/9$

Jika  $p$  tidak habis dibagi  $q$ , maka bilangan rasional adalah bilangan pecahan. Misalnya :  $13/5, (-4)/7, 6\frac{1}{4}$

5. Himpunan bilangan irasional  $I$ , yaitu suatu himpunan yang anggota-anggotanya tidak dapat ditulis sebagai  $p/q$ , dengan  $p$  dan  $q$  bilangan bulat dan  $q \neq 0$ .

Misalnya :  $\sqrt{2}, \log 3, \pi$

Himpunan bilangan real yaitu  $R$  merupakan gabungan dari himpunan bilangan rasional yaitu  $Q$  dan himpunan bilangan irasional  $I$ .

Sistem bilangan real yang terdiri dari himpunan bilangan real  $R$  dan dua operasi penambahan dan perkalian, memenuhi sifat-sifat berikut ini.

Misalkan  $a, b$ , dan  $c$  anggota himpunan bilangan real  $R$ .

1. Sifat tertutup

$a + b$  dan  $ab$  adalah bilangan real yang tunggal.

2. Sifat komutatif

$a + b = b + a$  dan  $ab = ba$ .

3. Sifat asosiatif

$a + (b + c) = (a + b) + c$  dan  $a(bc) = (ab)c$ .

4. Sifat distributif

$a(b + c) = ab + ac$ .

5. Elemen identitas

Terdapat dua bilangan real 0 dan 1, sehingga untuk setiap  $a + 0 = a$  dan  $a \cdot 1 = a$ .

6. Invers aditif

Untuk setiap bilangan  $a$  terdapat suatu bilangan  $-a$  yang disebut negatif  $a$ , sehingga  $a + (-a) = 0$ .

7. Invers perkalian

Untuk setiap bilangan  $a \neq 0$  terdapat suatu bilangan  $1/a$  yang disebut kebalikan  $a$ , sehingga  $a \cdot 1/a = 1$ .

Operasi pengurangan dapat dikembalikan pada operasi penjumlahan, yaitu  $a - b = a + (-b)$ .

Operasi pembagian dapat dikembalikan pada operasi perkalian, yaitu  $a / b = a \cdot 1 / b$  ( $b \neq 0$ ).

### C. PERTIDAKSAMAAN

Salah satu konsep yang sangat penting dalam kalkulus ialah konsep tentang limit. Konsep inilah yang membedakan kalkulus dari semua cabang matematika yang telah ada sebelumnya. Dalam definisi-definisi tentang limit yang akan kita bicarakan kemudian, seringkali timbul bentuk-bentuk pertidaksamaan seperti  $|x - 2| < 0,001$ . Karena itu dalam subtopik ini akan kita bahas cara menyelesaikan suatu pertidaksamaan.

Beberapa sifat yang perlu kita fahami adalah sebagai berikut.

Misalkan  $a, b, c, d$  anggota himpunan bilangan real  $R$ .

1. Jika  $a < b$  dan  $b < c$ , maka  $a < c$
2.  $a < -b$  bila dan hanya bila  $a + c < b + c$
3. Jika  $a < b$  dan  $c < d$ , maka  $a + c < b + d$
4. Jika  $c > 0$ , maka  $a < b$  bila dan hanya bila  $ac < bc$
5. Jika  $c < 0$ , maka  $a < b$  bila dan hanya bila  $ac > bc$
6. Jika  $a$  dan  $b$  bertanda sama, maka  $a < b$  bila dan hanya bila  $1/a > 1/b$
7. Jika  $a > 0, b > 0$ , maka  $a < b$  bila dan hanya bila  $a^2 < b^2$
8. Jika  $a < 0, b < 0$ , maka  $a < b$  bila dan hanya bila  $a^2 > b^2$

Selanjutnya kita definisikan beberapa pengertian tentang selang atau interval, sebagai berikut :

1. Selang terbuka  $(a, b)$  adalah himpunan bilangan real  $x$  yang memenuhi  $a < x < b$
2. Selang tertutup  $[a, b]$  adalah himpunan bilangan real  $x$  yang memenuhi  $a \leq x \leq b$
3. Selang setengah terbuka sebelah kanan (setengah tertutup sebelah kiri)  $[a, b)$  adalah himpunan bilangan real  $x$  yang memenuhi  $a \leq x < b$

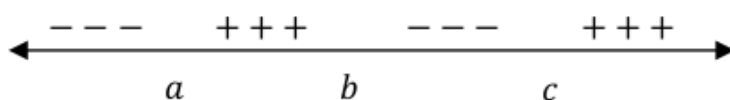


4. Selang tak hingga tertutup sebelah kanan  $(-\infty, a]$  adalah himpunan bilangan real  $x$  yang memenuhi  $x \leq a$

Salah satu sifat yang penting dalam sistem bilangan real yaitu setiap peta dari bilangannya dapat digambarkan sebagai sebuah titik-titik dalam garis lurus yang dikenal sebagai garis bilangan. Sebaliknya setiap titik pada garis bilangan adalah peta suatu bilangan real tertentu. Dikatakan terdapat korespondensi satu-satu antara anggota himpunan bilangan real dengan titik-titik pada garis bilangan.

Untuk menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan berbentuk  $(x - a)(x - b)(x - c) < 0$  dengan  $a < b < c$ , kita tentukan lebih dulu nilai-nilai nol ruas kiri, yaitu  $x = a, x = b$ , dan  $x = c$ .

Kemudian kita gambar peta dari nilai-nilai nol itu pada suatu garis bilangan. Perhatikan bahwa  $(x - a)(x - b)(x - c)$  berganti tanda dalam selang-selang berturutan yang dibatasi oleh nilai-nilai nolnya.



**Gambar 2.1.** Menentukan daerah positif/negatif

Lihat gambar 2.1, andaikan  $(x - a)(x - b)(x - c)$  dalam selang  $(a, b)$  bertanda positif, maka dalam selang  $(b, c)$  bentuk itu bertanda negatif, dalam selang  $(c, \infty)$  bertanda positif, dan dalam selang  $(-\infty, a)$  bertanda negatif. Himpunan penyelesaiannya ialah  $\{x \mid x < a \text{ atau } b < x < c\}$ .

### Contoh Soal

1. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan  $x^2 + x - 2 < 0$ , jika  $x$  berubah pada himpunan bilangan real  $R$ !

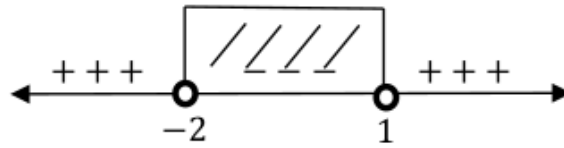
**Penyelesaian :**

$$x^2 + x - 2 < 0$$

$$(x + 2)(x - 1) < 0$$

$$x = -2 \text{ atau } x = 1$$

Gambarlah peta nilai-nilai nol itu pada suatu garis bilangan. Lihat gambar 2.2.



**Gambar 2.2.** Daerah positif/negatif dari  $x^2 + x - 2 < 0$

11 Jadi himpunan penyelesaian dari  $x^2 + x - 2 < 0$  adalah  $\{x \mid -2 < x < 1, x \in R\}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian  $\frac{(2x-1)}{(x-4)} < 3$ , jika  $x$  berubah pada himpunan bilangan real  $R$ !

**Penyelesaian :**

Syarat adanya penyelesaian :  $x \neq 4$ , karena penyebut tidak boleh 0, maka diperoleh penyelesaian dengan langkah-langkah berikut:

Langkah 1: Ruas kanan dijadikan nol, jadi

$$\frac{2x-1}{x-4} - 3 < 0$$

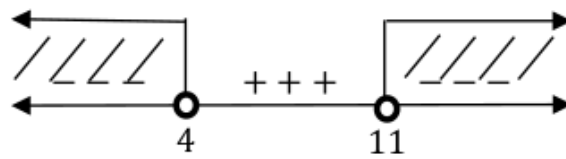
Langkah 2: Ruas kiri difaktorkan

$$\begin{aligned} \frac{2x-1-(3(x-4))}{x-4} &< 0 \\ \frac{2x-1-3x+12}{x-4} &< 0 \\ \frac{-x+11}{x-4} &< 0 \end{aligned}$$

Langkah 3: Menentukan nilai-nilai nol ruas kiri, yaitu

- Pembilang  
 $-x + 11 = 0$   
 $-x = -11$   
 $x = 11$
- Penyebut  
 $x - 4 = 0$   
 $x = 4$

Langkah 4: Menggambar peta nilai-nilai nol pada suatu garis bilangan.



**Gambar 2.3.** Daerah positif/negatif dari  $\frac{(2x-1)}{(x-4)} < 3$

58

Langkah 5: Jadi diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah  $\{x|x < 4, x > 11, x \in R\}$ .

3. Tentukan himpunan penyelesaian  $\sqrt{x+4} > \sqrt{2x+10}$ , jika  $x$  berubah pada himpunan bilangan real  $R$ !

**Penyelesaian :**

Langkah 1: Kedua ruas dipangkatkan dua agar akarnya hilang

$$(\sqrt{x+4})^2 > (\sqrt{2x+10})^2$$

$$x+4 > 2x+10$$

Langkah 2: Menentukan nilai-nilai nol ruas kiri

$$x+4 > 2x+10$$

$$-x > 6$$

$$x < -6$$

Syarat: 95

- $x+4 \geq 0$

$$x \geq -4$$

- $2x+10 \geq 0$

$$2x \geq -10$$

$$x \geq -5$$

Langkah 3: Menggambar peta nilai-nilai nol pada suatu garis bilangan.



**Gambar 2.4.** Daerah penyelesaian  $\sqrt{x+4} > \sqrt{2x+10}$

Langkah 4: Karena ketiga daerah itu tidak beririsan maka himpunan Penyelesaian  $\{\}$

4. Tentukan himpunan penyelesaian  $-3 < \frac{2}{x-2} < -1$ , jika  $x$  perubah himpunan bilangan real  $R$ !

**Penyelesaian :**

Syarat adanya penyelesaian adalah  $x \neq 2$ .

Soal ini kita selesaikan dengan memperhatikan sifat-sifat pertidaksamaan. Kita tidak boleh mengalikan ketiga ruas pertidaksamaan itu dengan  $x - 2$ , karena kita tidak mengetahui tandanya. Untuk itu kita bedakan dua hal, yaitu  $x - 2 > 0$  dan  $x - 2 < 0$ .

- a. Jika  $x - 2 > 0$ , maka  $x > 2$ . Kita peroleh

$$\begin{aligned} & -3(x - 2) < 2 < -1(x - 2) \\ \Leftrightarrow & -3x + 6 < 2 \text{ dan } 2 < -x + 2 \\ \Leftrightarrow & -3x < -4 \text{ dan } x < 0 \\ \Leftrightarrow & 3x > 4 \text{ dan } x < 0 \\ \Leftrightarrow & x > \frac{4}{3} \text{ dan } x < 0 \end{aligned}$$

Ternyata tidak ada nilai  $x$  yang memenuhi

- b. Jika  $x - 2 < 0$ , maka  $x < 2$ . Kita peroleh

$$\begin{aligned} & -3(x - 2) > 2 > -1(x - 2) \\ \Leftrightarrow & -3x + 6 > 2 \text{ dan } 2 > -x + 2 \\ \Leftrightarrow & -3x > -4 \text{ dan } x > 0 \\ \Leftrightarrow & 3x < 4 \text{ dan } x > 0 \\ \Leftrightarrow & x < \frac{4}{3} \text{ dan } x > 0 \end{aligned}$$

Karena  $x < 2$ , maka himpunan penyelesaiannya  $0 < x < \frac{4}{3}$

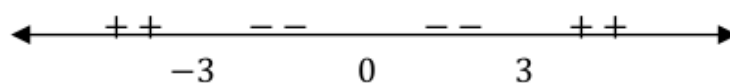
5. Tentukan himpunan penyelesaian  $x^4 - 9x^2 < 0$ , jika  $x$  perubah pada himpunan bilangan real  $R$ !

**Penyelesaian :**

$$x^2(x + 3)(x - 3) < 0$$

Nilai-nilai nol ruas kiri adalah  $-3, 0, 3$

Lihat gambar 2.5.



**Gambar 2.5.** Daerah positif/negative dari  $x^4 - 9x^2 < 0$

Karena ada dua nilai nol yang sama (berimpit) pada  $x = 0$ , maka ruas kiri tidak berganti tanda dalam dua selang berurutan yang dibatasi oleh  $x = 0$ . Untuk  $x = 1$  ruas kiri bernilai  $-8 < 0$ . Jadi, himpunan penyelesaian  $\{x \mid -3 < x < 3, x \neq 0\}$

## D. NILAI MUTLAK

Dalam kalkulus seringkali kita jumpai bentuk persamaan atau pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak atau bilangan real.

Misalnya

$$|x - 4| < d, |2x - 5| > |x + 4|, y = x^2 - 2|x| - 3, |\sin x| \leq 1$$

Dalam subtopik ini kita bahas konsep nilai mutlak suatu bilangan dan ketrampilan dalam menggunakan konsep tersebut.

Nilai mutlak suatu bilangan real  $x$  yang ditulis sebagai  $|x|$  didefinisikan

$$|x| = x \text{ jika } x \geq 0,$$

$$|x| = -x \text{ jika } x < 0.$$

Jadi untuk menentukan nilai mutlak suatu bilangan, kita harus mengetahui tanda bilangan itu. Misalnya

1.  $|3\pi - 1| = 3\pi - 1$ , karena  $3\pi - 1$  positif
2.  $|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$ , karena  $1 - \sqrt{3} < 0$
3.  $|-1 - \sqrt{3}| = -(-1 - \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}$ , karena  $-1 - \sqrt{3} < 0$
4.  $|2 - \log 4| = 2 - \log 4$ , karena  $2 - \log 4 > 0$

Jika  $x \geq 0$ , maka kita asumsikan  $\sqrt{x}$  adalah suatu bilangan tidak negatif yang kuadratnya sama dengan  $x$ . Hal ini mengakibatkan bahwa untuk setiap bilangan real  $x$  berlaku

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ dan } |x|^2 = x^2.$$

$$\text{Misalnya: } \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2, |1 - 3\pi|^2 = (1 - 3\pi)^2$$

Beberapa sifat tentang nilai mutlak dapat kita jumpai dalam teorema-teorema berikut ini.

1. Jika  $a$  dan  $b$  bilangan real, maka  $|a| \cdot |b| = |ab|$
2. Jika  $a$  dan  $b$  bilangan real, maka  $\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$ ,  $b \neq 0$
3. Jika  $a > 0$ , maka  $|x| < a$  bila dan hanya bila  $-a < x < a$

4. Apabila  $a > 0$ , maka  $|x| > a$  bila dan hanya bila  $x > a$  atau  $x < -a$
5. Jika  $a$  dan  $b$  bilangan real, maka  $|a + b| \leq |a| + |b|$
6. Jika  $a$  dan  $b$  bilangan real, maka  $|a - b| \geq |a| - |b|$

Teorema-teorema di atas dengan mudah dapat dibuktikan.

1.  $|a| \cdot |b| = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{(ab)^2} = |ab|$
2. Jika  $b \neq 0$ , maka  $|b| \cdot \frac{|a|}{|b|} = \left| b \cdot \frac{a}{b} \right|$
- $$|b| \cdot \frac{|a|}{|b|} = |a|$$
- $$\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

Pembuktian lain.

Misalkan,

$$\frac{a}{b} = c$$

$$a = bc$$

$$|a| = |bc|$$

$$|a| = |b||c|$$

$$\frac{|a|}{|b|} = |c|$$

$$\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$$

3.  $|x| < a \Leftrightarrow |a|^2 < a^2$
- $$\Leftrightarrow x^2 < a^2$$
- $$\Leftrightarrow (x + a)(x - a) < 0$$
- $$\Leftrightarrow -a < x < a$$
4.  $|x| > a \Leftrightarrow |a|^2 > a^2$
- $$\Leftrightarrow x^2 > a^2$$
- $$\Leftrightarrow (x + a)(x - a) > 0$$
- $$\Leftrightarrow x > a \text{ atau } x < -a$$

5. Untuk setiap bilangan real  $a$  dan  $b$  berlaku
- $$-|a| \leq a \leq |a| \text{ dan } -|b| \leq b \leq |b|, \text{ sehingga}$$
- $$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b| \text{ atau}$$
- $$|a + b| \leq |a| + |b|$$

6. Menurut ketaksamaan segitiga,

$$|a - b| + |b| \geq |(a - b) + b|$$

$$\Leftrightarrow |a - b| + |b| \geq |a - b + b|$$

$$\Leftrightarrow |a - b| + |b| \geq |a|$$

$$\Leftrightarrow |a - b| \geq |a| - |b|$$

Berikut ini perhatikan contoh-contohnya.

**Contoh Soal**

1. Tentukan himpunan penyelesaian  $|2x - 1| < 5$ , jika  $x$  berubah pada himpunan bilangan real  $R$ !

**Penyelesaian :**

$$\begin{aligned} & |2x - 1| < 5 \\ \Leftrightarrow & -5 < 2x - 1 < 5 \\ \Leftrightarrow & -5 < 2x - 1 \text{ dan } 2x - 1 < 5 \\ \Leftrightarrow & -2x < 4 \text{ dan } 2x < 6 \\ \Leftrightarrow & x > -2 \text{ dan } x < 3 \end{aligned}$$

Himpunan penyelesaian  $\{x \mid -2 < x < 3\}$

2. Carilah himpunan penyelesaian dari persamaan  $x^2 - |x| - 2 = 0$ , jika  $x$  berubah pada himpunan bilangan real  $R$ !

**Penyelesaian :**

Kita bedakan dua hal, yaitu  $x \geq 0$  dan  $x < 0$ .

a. Untuk  $x \geq 0$ , maka  $|x| = x$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x - 2)(x + 1) &= 0 \\ x &= 2 \text{ atau } x = -1 \end{aligned}$$

karena  $x \geq 0$  maka  $x = 2$

b. Untuk  $x < 0$ , maka  $|x| = -x$

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x + 2)(x - 1) &= 0 \\ x &= -2 \text{ atau } x = 1 \end{aligned}$$

karena  $x < 0$  maka  $x = -2$

Cara lain

$$x^2 - |x| - 2 = 0$$

Karena  $x^2 = |x|^2$ , maka:

$$|x|^2 - |x| - 2 = 0$$

Misalkan,  $y = |x| \geq 0$ , maka kita peroleh

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y - 2)(y + 1) = 0$$

$$y = 2 \text{ atau } y = -1$$

Karena  $y = |x| \geq 0$ , maka  $y = |x| = 2$ , sehingga  $x = 2$  atau  $x = -2$ . Jadi, himpunan penyelesaiannya  $\{-2, 2\}$ .

3. Tentukan himpunan penyelesaian  $|x^2 - 5x + 6| > x^2 - 5x + 6$ , jika  $x$  berubah pada himpunan bilangan real  $R$ !

**Penyelesaian :**

Karena pertidaksamaan  $|y| > y$  dipenuhi jika  $y < 0$ , maka pertidaksamaan yang diketahui dipenuhi oleh nilai-nilai  $x$  yang menyebabkan

$x^2 - 5x + 6 < 0$ , atau  $(x - 2)(x - 3) < 0$ , jadi  $2 < x < 3$ .

Himpunan penyelesaiannya  $\{2 < x < 3\}$

## E. RANGKUMAN

98

1. Bilangan real merupakan suatu bilangan yang mencakup anggota bilangan rasional serta irasional. Bilangan real dilambangkan dengan  $R$ . Adapun sifat-sifat dari bilangan real sebagai berikut:
2. Sifat-sifat bilangan real pada operasi penjumlahan dan perkalian meliputi bersifat; tertutup, komutatif, asosiatif, distributif, terdapat elemen identitas, mempunyai Invers aditif dan Invers perkalian.
3. Pertidaksamaan merupakan suatu kalimat/ Pernyataan matematika yang memuat satu atau lebih perubah dan terdapat tanda ketaksamaan yaitu  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ , atau  $\geq$ . Adapun sifat-sifat dari pertidaksamaan sebagai berikut:
  - a. Jika  $a < b$  dan  $b < c$ , maka  $a < c$
  - b.  $a < b$  bila dan hanya bila  $a + c < b + c$
  - c. Jika  $a < b$  dan  $c < d$ , maka  $a + c < b + d$
  - d. Jika  $c > 0$ , maka  $a < b$  bila dan hanya bila  $ac < bc$
  - e. Jika  $c < 0$ , maka  $a < b$  bila dan hanya bila  $ac > bc$
  - f. Jika  $a$  dan  $b$  bertanda sama, maka  $a < b$  bila dan hanya bila  $1/a > 1/b$
  - g. Jika  $a > 0, b > 0$ , maka  $a < b$  bila dan hanya bila  $a^2 < b^2$
  - h. Jika  $a < 0, b < 0$ , maka  $a < b$  bila dan hanya bila  $a^2 > b^2$



4

4. Nilai mutlak suatu bilangan real  $x$  yang ditulis  $|x|$ , didefinisikan sebagai berikut:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

5. Beberapa sifat nilai mutlak dapat ditemukan dalam teorema-teorema berikut ini:
- Jika  $a$  dan  $b$  bilangan real, maka  $|a| \cdot |b| = |ab|$
  - Jika  $a$  dan  $b$  bilangan real, maka  $\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$ ,  $b \neq 0$
  - Jika  $a > 0$ , maka  $|x| < a$  bila dan hanya bila  $-a < x < a$
  - Jika  $a > 0$ , maka  $|x| > a$  bila dan hanya bila  $x > a$  atau  $x < -a$
  - Jika  $a$  dan  $b$  bilangan real, maka  $|a + b| \leq |a| + |b|$
  - Jika  $a$  dan  $b$  bilangan real, maka  $|a - b| \geq |a| - |b|$

## F. EVALUASI

Kerjakan soal evaluasi berikut ini supaya menambah pemahaman kalian tentang bab ini.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut.

- $x^2 - 3x + 2 > 0$
- $\frac{3}{2x-4} < 1$
- $\sqrt{2-3x} > \sqrt{4x+5}$
- $-2 < \frac{5}{2x-5} < -1$
- $x^4 - x^2 < 0$

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak berikut.

- $-4|4x - 4| = 64$
- $|7x| = 7 - x$
- $\left| \frac{2}{3x-1} \right| > 1$
- $|x^2 - 2x - 1| \leq 2$
- $4|x - 2| + 12 > |x - 2|^2$

# BAB 3

## FUNGSI

### A. PENDAHULUAN

Masih ingatkan kalian tentang konsep dasar fungsi?. Pada bab ini akan dibahas tentang konsep fungsi yang pernah kalian pelajari pada jenjang pendidikan sebelumnya. Materi fungsi menjadi salah satu materi dasar dalam mempelajari kalkulus. Di dalam kalkulus, materi tentang fungsi banyak dijumpai seperti pada bab limit dan turunan yang akan dibahas pada bab berikutnya. Oleh karena itu, tujuan pembelajaran pada bab ini antara lain:

1. Mahasiswa mampu menjelaskan perbedaan fungsi dan relasi.
2. Mahasiswa mampu menentukan domain dan range dari berbagai bentuk fungsi.
3. Mahasiswa dapat menjelaskan macam-macam fungsi.
4. Mahasiswa dapat menggambar grafik dari berbagai macam fungsi.
5. Mahasiswa dapat menentukan invers fungsi.

### B. DEFINISI FUNGSI, DOMAIN, DAN RANGE

Fungsi menjadi salah satu konsep matematika yang penting dipelajari. Fungsi didefinisikan sebagai suatu relasi khusus. Apakah perbedaan relasi dan fungsi?. Untuk lebih jelasnya, maka dalam subtopik ini terlebih dulu akan kita bahas pengertian relasi.

Perhatikan dua himpunan  $A = \{p, q, r\}$  dan  $B = \{1, 2\}$ . Jika kita definisikan dua himpunan tersebut dalam perkalian cartesius himpunan  $A$  dan himpunan  $B$  sebagai  $A \times B = \{(x, y) \mid x \text{ anggota } A, y \text{ anggota } B\}$ .

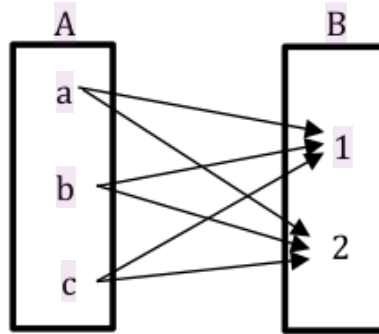
$$A \times B = \{(p, 1), (p, 2), (q, 1), (q, 2), (r, 1), (r, 2)\}$$

$$B \times A = \{(1, p), (1, q), (1, r), (2, p), (2, q), (2, r)\}$$

Perhatikan bahwa himpunan pasangan berurutan dari perkalian  $A \times B \neq B \times A$ , maka dapat disimpulkan bahwa perkalian cartesius dua himpunan tidak komutatif.

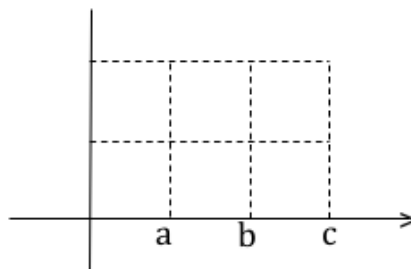
Relasi  $A$  dengan  $B$  dapat disajikan dengan beberapa cara, yaitu sebagai:

1. Gambar diagram panah dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  tampak pada **Gambar 3.1** berikut.



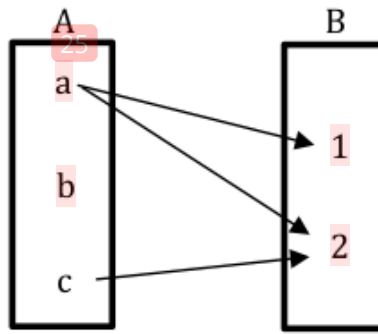
**Gambar 3.1** Diagram Panah

2. Himpunan pasangan berurutan dimana elemen pertama adalah anggota himpunan  $A$  dan elemen kedua merupakan anggota himpunan  $B$ .
3. Himpunan titik pada bidang koordinat, seperti pada **Gambar 3.2**.



**Gambar 3.2.** Pasangan titik pada bidang koordinat

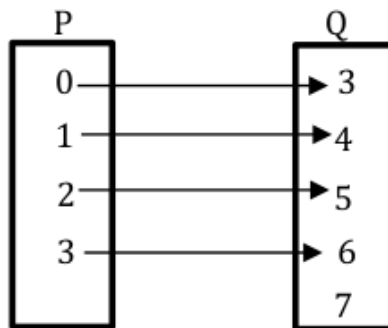
Misalkan terdapat himpunan  $A = \{a, b, c\}$  dan  $B = \{1, 2\}$ . Terdapat suatu relasi yang menyatakan  $\{(a, 1), (a, 2), (c, 2)\}$ . Untuk bisa memahami apa yang dimaksud dengan relasi, maka perhatikan **Gambar 3.3** berikut.



**Gambar 3.3** Relasi  $A$  ke  $B$

Berdasarkan **Gambar 3.3** terlihat bahwa relasi ini merupakan himpunan bagian dari  $A \times B$ . Secara umum dapat dikatakan bahwa suatu relasi yang memasangkan dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  adalah himpunan bagian dari perkalian cartesius himpunan  $A$  dan himpunan  $B$ . Relasi merupakan aturan yang memetakan anggota himpunan  $A$  ke himpunan  $B$ .

Perhatikan sekarang apabila diberikan dua himpunan  $P = \{0,1,2,3\}$  dan  $Q = \{3,4,5,6,7\}$ . Kita dapat mengadakan suatu relasi  $R$  dari himpunan  $P$  ke himpunan  $Q$ , sehingga anggota sebarang  $x$  dalam himpunan  $P$  dikawankan dengan anggota  $x + 3$  dalam himpunan  $Q$ . Hal ini dapat dinyatakan sebagai  $R: x \rightarrow x + 3$ . Perhatikan **Gambar 3.4** berikut.



**Gambar 3.4.** Relasi  $P$  ke  $Q$

Berdasarkan relasi  $R$  dikatakan bahwa anggota  $Q$  yaitu 3, 4, 5, 6 berturut-turut merupakan **peta** atau **bayangan** dari anggota himpunan  $P$ . Apabila relasi dari  $P$  ke  $Q$  kita nyatakan dalam himpunan pasangan terurut, maka diperoleh  $R =$

$\{(0,3), (1,4), (2,5), (3,6)\}$ . Relasi  $R$  ini adalah relasi yang khusus, sebab setiap anggota himpunan  $P$  dikawankan dengan tepat satu anggota himpunan  $Q$ . Relasi seperti ini disebut suatu fungsi atau pemetaan dari himpunan  $P$  ke himpunan  $Q$ .

Jadi suatu relasi  $R$  dari himpunan  $P$  ke himpunan  $Q$  disebut sebagai suatu fungsi atau pemetaan, jika setiap anggota himpunan  $P$  dikawankan dengan tepat satu anggota himpunan  $Q$ . Oleh karena itu, apabila terdapat suatu relasi yang tidak semua anggotanya mempunyai kawan atau apabila kawannya tidak tepat satu, maka relasi tersebut tidak dapat dikatakan sebagai suatu fungsi.

Misalkan relasi  $R$  yang merupakan suatu fungsi pada contoh di atas kita nyatakan sebagai fungsi  $f$ , maka fungsi tersebut dapat dituliskan dalam  $f : x \rightarrow x + 3$ . Jika  $x$  anggota himpunan  $P$ , maka hasil pemetaan  $x$  oleh fungsi  $f$  ditulis sebagai  $f(x)$ . Karena fungsi  $f$  memetakan  $x$  ke  $x + 3$ , maka dapat ditulis  $f(x) = x + 3$ , yang berarti bahwa  $x + 3$  adalah peta dari fungsi  $f$  oleh  $x$ . Selanjutnya  $f(x) = x + 3$  disebut **rumus fungsi  $f$** . Himpunan  $P$  disebut **domain** atau **daerah asal**, himpunan  $Q$  disebut **kodomain** atau **daerah kawan**, sedangkan himpunan semua peta, yaitu  $\{3,4,5,6,7\}$  disebut **range** atau **daerah hasil** fungsi  $f$ .

Jika sebuah fungsi diketahui domain dan rumusnya, maka daerah hasilnya dapat ditentukan. Perhatikan contoh berikut ini.

#### Contoh Soal

1. Sebuah fungsi  $f$  ditentukan oleh rumus  $f(x) = x^2 - 2$ , sedangkan domainnya ialah  $D = \{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \text{ bilangan bulat}\}$ . Tentukan daerah hasil fungsi  $f$ !

#### Penyelesaian:

Anggota dari domain fungsi  $f$  adalah  $-2, -1, 0, 1, 2$ .

Daerah hasil fungsi  $f$  dapat dicari dengan menentukan peta oleh  $-2, -1, 0, 1, 2$  secara berturut-turut. Selanjutnya, fungsi  $f$  dapat disajikan dengan himpunan pasangan terurut  $\{(-2,2), (-1,-1), (0,-2), (1,-1), (2,2)\}$ .

2. Diberikan sebuah fungsi  $f = 2x + 3$ , apabila domain fungsi tersebut dibatasi oleh  $-1 \leq x \leq 3, x \in$  bilangan bulat, maka tentukan hasil pemetaan dari fungsi tersebut.

**Penyelesaian:**

Anggota domain fungsi  $f$  adalah  $-1, 0, 1, 2, 3$ .

Hasil pemetaan dari masing-masing anggota domain adalah:

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 2(0) + 3 = 3$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = 2(1) + 3 = 5$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = 2(2) + 3 = 7$$

$$x = 3 \rightarrow f(3) = 2(3) + 3 = 9$$

Jadi, hasil pemetaan fungsi  $f$  berturut-turut adalah  $1, 3, 5, 7, 9$ .

Dalam membicarakan suatu fungsi, kita jarang menyebutkan domain dari fungsi yang dibicarakan, sehingga hal ini membuat semesta pembicaraan menjadi tidak jelas.

Anggota domain fungsi  $f$  diartikan sebagai suatu bilangan  $x$  yang mengakibatkan  $f(x)$  terdefinisi. Kalimat terdefinisi disini yang dimaksud adalah apabila terdapat himpunan semua  $x$  yang mengakibatkan  $f(x)$  real dan tunggal. Jadi, apabila bilangan  $x$  tersebut tidak mengakibatkan  $f(x)$  real atau tunggal, maka  $x$  bukan anggota dari domain fungsi.

Misalnya fungsi bentuk akar yang dirumuskan  $f(x) = \sqrt{x-5}$ , maka domainnya adalah  $\{x/x \geq 5\}$ , sebab  $\sqrt{(x-5)}$  akan bernilai real dan tunggal jika bentuk di bawah tanda akar tidak negatif.

**Contoh Soal**

1. Fungsi  $f$  ditentukan oleh rumus  $f(x) = \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x}$ .

Tentukan:

- Domain fungsi  $f$
- Daerah hasil fungsi  $f$

c. **Penyelesaian:**

- a.  $f(x)$  real dan tunggal, bila  $x^2 - 16 \geq 0$  dan  $x \geq 0$ .  
 $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$  atau  $x \leq -4$ .

Domain  $D = \{x/x \geq 4\}$ .

Untuk  $x \geq 4$ , maka  $f(x) \geq \sqrt{4}$ . Daerah hasil  $H = \{f(x)|f(x) \geq \sqrt{4}\}$ .

2. Fungsi  $f$  ditentukan oleh rumus  $f(x) = 2 - {}^3\log({}^3\log x)$ .

Tentukan:

- Domain dari fungsi  $f$
- Range dari fungsi  $f$

**Penyelesaian:**

- a. Agar  $f(x)$  real dan tunggal, maka  $x$  harus memenuhi syarat-syarat berikut:

- $x > 0$  (karena numerus pada  ${}^3\log x$  harus positif)
- ${}^3\log x > 0$  (karena numerus dari  ${}^3\log({}^3\log x)$  adalah  ${}^3\log x$ , sehingga diperoleh sebagai berikut:

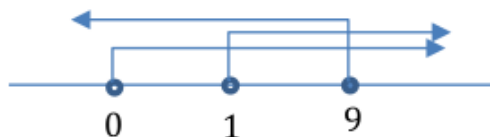
$$\begin{aligned} {}^3\log x > 0 &\Leftrightarrow {}^3\log x > {}^3\log 3^0 \\ &\Leftrightarrow x > 3^0 \\ &\Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

- $2 - {}^3\log({}^3\log x) \geq 0$

$$\begin{aligned} 2 - {}^3\log({}^3\log x) \geq 0 &\Leftrightarrow - {}^3\log({}^3\log x) \geq -2 \\ &\Leftrightarrow {}^3\log({}^3\log x) \leq 2 \end{aligned}$$

misal  ${}^3\log x = y$ , maka diperoleh:

$$\begin{aligned} {}^3\log y &\leq 2 \\ {}^3\log y &\leq {}^3\log 3^2 \\ y &\leq 9 \end{aligned}$$



Berdasarkan garis bilangan diatas, maka dapat dilihat bahwa ketiga himpunan itu saling beririsan. Domain dari fungsi  $f$  merupakan irisan dari ketiga himpunan. Jadi dapat disimpulkan domainnya adalah  $D = \{x | 1 < x \leq 9, x \in R\}$ .

b. Untuk  $1 < x \leq 9, f(x) \geq 0$ . Jadi daerah hasilnya adalah

$$H = \{f(x) | f(x) \geq 0\}.$$

3. Diberikan suatu fungsi  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

- Domain fungsi  $f(x)$
- Range dari fungsi  $f(x)$

**Penyelesaian:**

a. Untuk menentukan domain fungsi  $f(x)$  maka perhatikan bahwa  $f(x)$  merupakan suatu fungsi bentuk pecahan. Ingat kembali bahwa pecahan (bilangan rasional) adalah suatu bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk  $\frac{p}{q}$ , dimana  $q \neq 0$ . Hal ini berarti penyebut tidak boleh bernilai 0. Domain fungsi  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$  diperoleh jika  $2x + 1 \neq 0$  atau  $x \neq -\frac{1}{2}$ . Jadi domain fungsi  $f(x)$  adalah  $\{x | x \neq -\frac{1}{2}, x \in R\}$ .

b. Untuk  $x \neq -\frac{1}{2}$ , maka dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2x+1} &\rightarrow 2x + 1 = \frac{1}{y} \\ 2x &= \frac{1}{y} - 1 \\ x &= \frac{\frac{1}{y} - 1}{2} \\ x &= \frac{1-y}{2y} \end{aligned}$$

$x = \frac{1-y}{2y}, \text{ dimana } 2y \neq 0$

Jadi, range dari fungsi  $f(x)$  adalah  $\{y | y \neq 0, y \in R\}$



### C. GRAFIK FUNGSI

Pada sub bab sebelumnya telah dibahas bahwa dalam menyatakan rumus fungsi misalnya sebuah fungsi  $f$  memetakan  $x$  ke  $2x + 3$ , maka rumus fungsi  $f$  dinyatakan sebagai  $f(x) = 2x + 3$ . Suatu fungsi  $f$  dengan domain  $D$  dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut  $\{(x, f(x)) | x \text{ anggota } D\}$ .

Grafik fungsi  $f$  ialah himpunan pasangan terurut  $(x, y)$  dengan  $x$  anggota domain  $D$  dan  $y$  adalah peta dari  $x$  oleh fungsi  $f$ , yang dapat kita nyatakan sebagai  $\{(x, y) | y = f(x), x \text{ anggota } D\}$ . Selanjutnya  $y = f(x)$  disebut persamaan dari grafik fungsi (Moesono, 1988). Perhatikan contoh berikut ini.

#### Contoh Soal

1. Tentukan apakah  $x^2 + y^2 = 10$  merupakan fungsi atau bukan fungsi!

**Penyelesaian:**

$$\text{Jika, } x = 1 \rightarrow 1^2 + y^2 = 10$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3$$

Karena hasil pemetaan ,  $x = 1$  tidak tunggal,  $x^2 + y^2 = 10$  bukan fungsi.

2. Diberikan suatu persamaan  $y = \sqrt{5 - x^2}$ . Apakah  $y = \sqrt{5 - x^2}$  merupakan suatu fungsi?

**Penyelesaian:**

Untuk mengetahui apakah  $y = \sqrt{5 - x^2}$  fungsi atau bukan, maka dapat dicoba menentukan hasil pemetaan dari beberapa anggota domainnya, yaitu:

$$x = -1 \rightarrow y = 2$$

$$x = 0 \rightarrow y = \sqrt{5}$$

$$x = 1 \rightarrow y = 2$$

$$x = 2 \rightarrow y = \sqrt{1}$$

$$x = 3 \rightarrow y = \sqrt{-4}$$

Karena hasil pemetaan setiap anggota domain fungsi berturut-turut memiliki pasangan tepat satu, maka  $y = \sqrt{5-x^2}$  merupakan suatu **fungsi**.

Dalam menggambar suatu grafik fungsi, perlu dipahami perbedaan antara rumus fungsi dan persamaan grafik. Apakah keduanya memiliki arti yang sama? Perhatikan penjelasan berikut.

Seringkali kalian mendengar pembahasan tentang fungsi kuadrat, persamaan kuadrat, atau bahkan persamaan grafik fungsi kuadrat. Ketiganya mempunyai arti yang berbeda. Fungsi kuadrat didefinisikan sebagai suatu fungsi  $f$  pada himpunan bilangan real  $R$  yang ditentukan oleh rumus  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , dengan  $a, b, c$  bilangan real dan  $a \neq 0$ . Sedangkan Grafik fungsi kuadrat dinyatakan sebagai  $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$  dan persamaannya adalah  $y = ax^2 + bx + c$ . Jadi, ketiganya dapat dirinci sebagai berikut:

1. Persamaan kuadrat dinyatakan dalam  $ax^2 + bx + c = 0$ .
2. Rumus fungsi kuadrat  $f$  dinyatakan dalam  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .
3. Persamaan grafik dari fungsi kuadrat atau disebut sebagai persamaan dari fungsi kuadrat dinyatakan sebagai  $y = ax^2 + bx + c$ .

#### Contoh Soal

Suatu fungsi  $f$  dirumuskan sebagai  $f(x) = x^2 - 2|x| - 3$  dengan domain  $-4 \leq x \leq 4$ . Tentukan:

- a. Grafik fungsi  $f$
- b. Daerah hasil fungsi  $f$

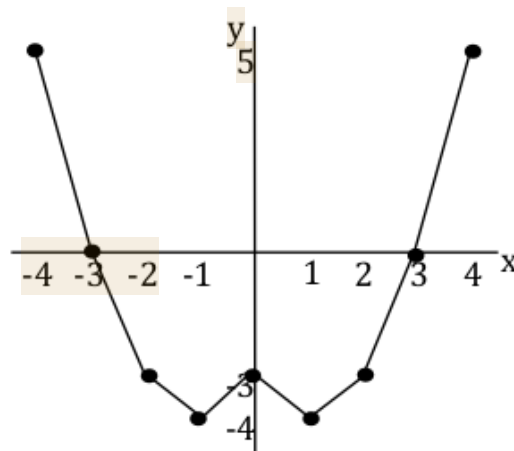
**Penyelesaian:**

- a. Untuk  $x \geq 0 \rightarrow |x| = x$ , maka  $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y$	21	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

Untuk  $x < 0 \rightarrow |x| = -x$ , maka  $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y$	5	0	-3	-4	-3	0	5	12	21



**Gambar 3.5.** Gambar grafik fungsi  $f(x) = x^2 - 2|x| - 3$

b. Daerah hasilnya adalah  $H = \{-4, -3, 0, 5\}$

## D. MACAM-MACAM FUNGSI

Dalam subtopik ini akan dibicarakan macam-macam fungsi yang sering kita gunakan dalam kalkulus.

1. Fungsi Eksplisit dan Implisit
  - a. Fungsi eksplisit

Pada persamaan fungsi eksplisit dijabarkan bahwa variabel  $x$  dan  $y$  tidak berada dalam satu ruas yang sama, misalnya  $y = 2x^2 - x + 3$ .

- b. Fungsi implisit

Persamaan fungsi implisit, dinyatakan bahwa  $x$  dan  $y$  berada dalam satu ruas sama, misalnya,  $2x + 3y - 6 = 0$ .

## 2. Fungsi Rasional

Fungsi  $f$  disebut fungsi rasional, jika rumus fungsi itu dapat ditulis sebagai hasil bagi dua bentuk polinom (suku banyak) dalam  $x$ , yaitu

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1} + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1} + b_m}$$

dengan  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$  suatu konstanta real, sedangkan  $n$  dan  $m$  suatu bilangan asli. Ini berarti bahwa dalam rumus fungsi itu hanya dilakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian terhadap variabel  $x$  (Moesono, 1988).

Berdasarkan Moesono (1988), fungsi rasional dibagi menjadi dua macam, yaitu:

### a. Fungsi rasional bulat atau fungsi polinom

Dikatakan fungsi rasional bulat jika operasi pembagian tidak dilakukan terhadap perubah  $x$ . jadi rumus fungsi itu dapat ditulis  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1} + a_n$ . Misalnya,  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ .

### b. Fungsi rasional pecah

Dikatakan fungsi rasional pecah jika operasi pembagian dilakukan terhadap perubah  $x$ . Misalnya,

$$f(x) = \frac{x-2}{2x^2-x-6}$$

## 3. Fungsi Aljabar

Fungsi  $f$  disebut fungsi aljabar, jika dalam rumus fungsi itu hanya dilakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, atau penarikan akar terhadap perubah  $x$ .

### a. Fungsi rasional

Fungsi  $f$  disebut fungsi rasional, jika operasi penarikan akar tidak dilakukan terhadap perubah  $x$ . Misalnya,  $f(x) = 2x + 1$

b. Fungsi irasional

Fungsi  $f$  disebut fungsi irasional, jika operasi penarikan akar dilakukan terhadap perubah  $x$ .

$$\text{Misalnya, } f(x) = x^2 - \sqrt{x}, g(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x}}, h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

4. Fungsi Transenden

Semua fungsi yang bukan fungsi aljabar dinamakan fungsi transenden. Beberapa fungsi transenden yang penting antara lain ialah:

- 1) Fungsi eksponen, misalnya  $y = 12^x$
- 2) Fungsi logaritma, misalnya  $y = \log_5 3x$
- 3) Fungsi trigonometri, misalnya  $y = \cos(\sin x)$
- 4) Fungsi siklometri, misalnya  $y = \arcsin x$

5. Fungsi Genap dan Ganjil

a. Fungsi genap

Fungsi  $f$  dengan persamaan  $y = f(x)$  disebut fungsi genap, jika untuk setiap  $x$  dalam domain fungsi itu berlaku  $f(-x) = f(x)$ .

Misalnya,  $f(x) = 2x^2 - \cos x$  adalah fungsi genap,

$$\begin{aligned} \text{Sebab } f(-x) &= 2(-x)^2 - \cos(-x) \\ &= 2x^2 - \cos x \\ f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

b. Fungsi ganjil

Fungsi  $f$  dengan persamaan  $y = f(x)$  disebut fungsi ganjil, jika untuk setiap  $x$  dalam domain fungsi itu berlaku  $f(-x) = -f(x)$ .

Misalnya,  $f(x) = x + 2 \sin x$  adalah fungsi ganjil,

$$\begin{aligned} \text{sebab } f(-x) &= -x + 2 \sin(-x) \\ &= -x + (-2 \sin x) \\ &= -(x + 2 \sin x) \\ f(-x) &= -f(x) \end{aligned}$$

## 6. Fungsi Periodik

Fungsi  $f$  dengan persamaan  $y = f(x)$  disebut fungsi periodik, jika dapat ditentukan suatu konstanta positif  $p$  dalam domain  $D$ , sehingga untuk setiap  $x$  dalam domain  $D$  berlaku  $f(x + p) = f(x)$ . Nilai  $p$  terkecil dan positif disebut periode fungsi itu.

### Contoh Soal

1. Tunjukkan bahwa  $f(x) = \cos x$  adalah periodik, dan tunjukkan periodenya!

#### Penyelesaian:

$f(x) = \cos x$  adalah periodik, sebab kita dapat menentukan konstanta positif  $p$ , yaitu  $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$  sehingga

$$f(x + p) = \cos(x + p)$$

$$f(x + p) = \cos(x + 2\pi)$$

$$f(x + p) = \cos x$$

$$f(x + p) = f(x)$$

karena nilai  $p$  yang terkecil dan positif adalah  $2\pi$ , maka periodenya adalah  $2\pi$ .

2. Tentukan periode  $f(x) = \cos 4x$ , kemudian tentukan periode  $g(x) = a \cos(bx + c)$ , jika  $a, b, c$  bilangan real!

#### Penyelesaian:

$$f(x) = \cos 4x$$

$$f(x + 2\pi) = \cos(4x + 2\pi)$$

$$f(x + 2\pi) = \cos 4\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$f(x + 2\pi) = f\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

Jadi, periode  $f(x) = \cos 4x$  adalah  $p = \frac{1}{2}\pi$

$$g(x) = a \cos(bx + c)$$

$$g(x + 2\pi) = a \cos(bx + c + 2\pi)$$

$$g(x + 2\pi) = a \cos \left[ b \left( x + \frac{2\pi}{b} \right) + c \right]$$

$$g(x + 2\pi) = g \left( x + \frac{2\pi}{b} \right)$$

jadi, periode  $g(x) = a \cos(bx + c)$  adalah  $p = \frac{2\pi}{b}$ , rumus periode ini biasanya sering dipakai sebagai rumus umum periode  $f(x) = \cos bx$ .

3. Tentukan periode  $f(x) = \cos^2 x$ !

**Penyelesaian:**

$$f(x) = \cos^2 x$$

$$\text{karena, } \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 1 = 2 \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

Maka,

$$f(x) = \cos^2 x$$

$$= \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$f(x + 2\pi) = \frac{1}{2} \cos \left( 2x + \frac{1}{2} + 2\pi \right)$$

$$f(x + 2\pi) = \frac{1}{2} \cos \left[ 2(x + \pi) + \frac{1}{2} \right]$$

$$f(x + 2\pi) = f(x + \pi)$$

jadi, periode  $f(x) = \cos^2 x$  adalah  $p = \pi$

4. Tentukan periode  $f(x) = 2 \sin 2x + 3 \cos x + \tan \frac{1}{3} x$ !

**Penyelesaian:**

$$\text{Misalkan } f_1(x) = 2 \sin 2x, \text{ periodenya } p_1 = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$f_2(x) = 3 \cos x, \text{ periodenya } p_2 = 2\pi$$

$$f_3(x) = \tan \frac{1}{3} x, \text{ periodenya } p_3 = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 2\pi \times 3 = 6\pi$$

periode dari  $f(x) = 2 \sin 2x + 3 \cos x + \tan \frac{1}{3} x$  adalah KPK dari  $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$  maka periodenya adalah  $6\pi$ .

7. Fungsi Bilangan Bulat Terbesar

$f(x) = [x]$  disebut fungsi bilangan bulat terbesar dan didefinisikan  $[x] = \text{bilangan bulat terbesar } \leq x$ .

- a. Grafik fungsi  $y = [x]$   
 $y = n$  jika  $n \leq x < n + 1$ , jadi  
 $y = 0$  jika  $0 \leq x < 1$ ,  
 $y = 1$  jika  $1 \leq x < 2$ ,  
 $y = 2$  jika  $2 \leq x < 3$ ,  
 $y = -1$  jika  $-1 \leq x < 0$ , dst
- b. Grafik fungsi  $y = 2x - 1$   
 $y = n$  jika  $n \leq 2x - 1 < n + 1$   
 $n + 1 \leq 2x < n + 2$   
 $\frac{1}{2}(n + 1) \leq x < \frac{1}{2}(n + 2)$

Jadi,

- $y = 0$  jika  $\frac{1}{2} \leq x < 1$ ,  
 $y = 1$  jika  $1 \leq x < \frac{3}{2}$ ,  
 $y = 2$  jika  $\frac{3}{2} \leq x < 2$ ,  
 $y = -1$  jika  $0 \leq x < \frac{1}{2}$ ,  
 $y = -2$  jika  $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ , dst

#### 8. Fungsi Monoton

- a. Fungsi  $f$  dikatakan naik dalam selang  $(a, b)$  bila dan hanya bila untuk setiap pasang nilai  $x_1$  dan  $x_2$  yang memenuhi  $a < x_1 < x_2 < b$  berlaku  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- b. Fungsi  $f$  dikatakan turun dalam selang  $(a, b)$  bila dan hanya bila untuk setiap pasang nilai  $x_1$  dan  $x_2$  yang memenuhi  $a < x_1 < x_2 < b$  berlaku  $f(x_1) > f(x_2)$ .
- c. Fungsi  $f$  dikatakan monoton dalam selang  $(a, b)$  bila fungsi  $f$  naik dalam selang itu (monoton naik) atau bila fungsi  $f$  turun dalam selang itu (monoton turun).

Ciri grafik fungsi  $f$  yang monoton dalam domainnya ialah bahwa setiap garis sejajar sumbu  $Y$  memotong grafik di satu titik (karena  $f$  suatu fungsi) dan setiap garis sejajar sumbu  $X$  memotong grafik di satu titik (karena  $f$  monoton).

**Contoh Soal**



1. Tunjukkan bahwa  $f(x) = 2^{-x}$  monoton turun!

**Penyelesaian:**

Ambil  $x_1 < x_2$ , maka  $2^{x_1} < 2^{x_2}$  atau  $2^{-x_1} > 2^{-x_2}$ , jadi  $f(x_1) > f(x_2)$ . Maka  $f(x)$  monoton turun.

2. Tunjukkan bahwa  $f(x) = \sin x$  monoton naik dalam selang  $(0, \frac{1}{2}\pi)$ !

**Penyelesaian:**

Ambil  $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{2}\pi$ , namakan  $x_2 - x_1 = h > 0$

Maka  $f(x_1) = \sin x_1$  dan  $f(x_2) = \sin x_2$ . Jadi

$$f(x_2) - f(x_1) = \sin(x_1 + h) - \sin x_1$$

$$= 2 \cos\left(x_1 + \frac{1}{2}h\right) \sin \frac{1}{2}h$$

Karena  $0 < x_1 + \frac{1}{2}h < \frac{1}{2}\pi$ , maka  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ .

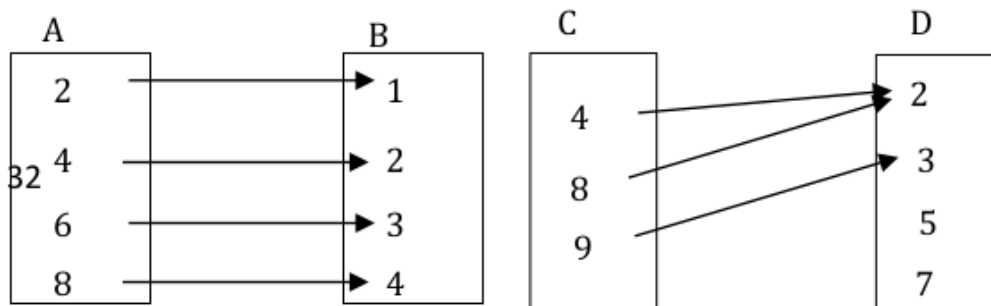
Jadi  $f(x)$  monoton naik dalam selang  $(0, \frac{1}{2}\pi)$ .

## E. FUNGSI INVERS

Telah kita ketahui bahwa fungsi  $f$  dari suatu himpunan  $P$  ke himpunan  $Q$  merupakan suatu relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan  $P$  dengan anggota himpunan  $Q$  tepat satu.

**Gambar 3.6 (a)** menunjukkan diagram panah fungsi  $f$  dari himpunan  $A = \{2,4,6,8\}$  ke himpunan  $B = \{1,2,3,4\}$  yang ditentukan oleh relasi "dua kali". Himpunan  $A$  adalah domain, himpunan  $B$  kodomain, dan himpunan semua peta yaitu  $\{1,2,3,4\}$  adalah daerah hasil fungsi  $f$ .

**Gambar 3.6 (b)** menunjukkan diagram panah fungsi  $g$  dari himpunan  $C = \{4,8,9\}$  ke himpunan  $D = \{2,3,5,7\}$  yang ditentukan oleh relasi "kelipatan". Himpunan  $C$  adalah domain, himpunan  $D$  kodomain, dan himpunan semua peta yaitu  $\{2,3\}$  adalah daerah hasil fungsi  $g$ .



(a)

(b)

**Gambar 3.6.** Hasil pemetaan fungsi

Apakah perbedaan antara fungsi  $f$  dan fungsi  $g$  di atas? Pada fungsi  $f$  tidak ada anggota-anggota himpunan  $A$  yang mempunyai peta yang sama dalam  $B$ . Fungsi demikian disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu.

Pada fungsi  $g$  terdapat anggota himpunan  $C$ . Yaitu 4 dan 8, yang mempunyai peta yang sama dalam himpunan  $D$ . Fungsi demikian dikatakan bukan fungsi injektif.

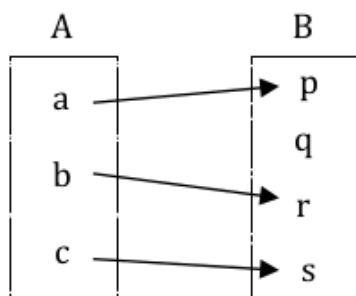
Perhatikan sekali lagi fungsi  $f$  pada **Gambar 3.6 (a)** dan fungsi pada **Gambar 3.6 (b)**!

Pada fungsi  $f$  ternyata bahwa daerah hasilnya sama dengan kodomainnya, yaitu  $\{1,2,3,4\}$ . Fungsi demikian disebut fungsi surjektif atau fungsi onto. Pada fungsi  $g$  ternyata bahwa daerah hasilnya beda dengan kodomainnya, yaitu  $\{2,3\}$ . Fungsi demikian dikatakan bukan fungsi surjektif, dan disebut fungsi into. Fungsi yang sekaligus merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif disebut fungsi bijektif. Fungsi  $f$  pada **Gambar 3.6 (a)** adalah fungsi bijektif.

Jika  $f$  adalah fungsi yang memetakan himpunan  $A$  ke himpunan  $B$ , maka setiap anggota  $a$  himpunan  $A$  dipetakan secara tunggal ke  $b = f(a)$  anggota himpunan  $B$ . Sekarang timbul pertanyaan, yaitu apakah selalu terdapat fungsi  $g$  yang memetakan anggota himpunan  $B$  ke anggota himpunan  $A$ , sehingga  $g(b) = a$ ? Untuk dapat menjawab pertanyaan di atas, perhatikan tiga contoh fungsi berikut.

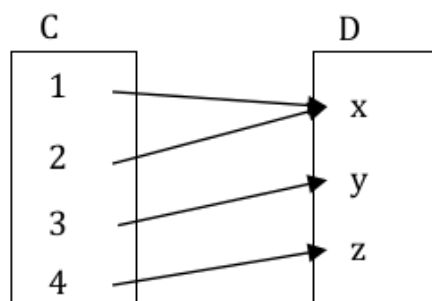
1. Fungsi  $h$  dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  bukan fungsi surjektif. Dengan membalik arah anak panah, ternyata tidak menentukan

suatu fungsi dari himpunan  $B$  ke himpunan  $A$ . Lihat **Gambar 3.7**.



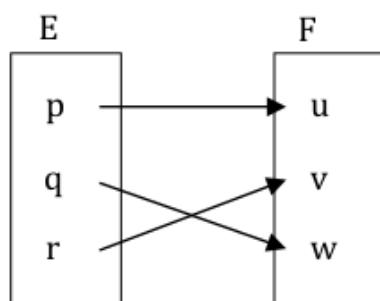
**Gambar 3.7.** Pemetaan A ke B

2. Fungsi  $k$  dari himpunan  $C$  ke himpunan  $D$  bukan fungsi injektif. Dengan membalik arah anak panah, ternyata tidak menentukan suatu fungsi dari himpunan  $D$  ke himpunan  $C$ . Lihat **Gambar 3.8**.



**Gambar 3.8.** Pemetaan C ke D

3. Fungsi  $m$  dari himpunan  $E$  ke himpunan  $F$  adalah fungsi bijektif. Dengan membalik arah anak panah, ternyata menentukan suatu fungsi dari himpunan  $F$  ke himpunan  $E$ . Lihat **Gambar 3.9**.



**Gambar 3.9.** Pemetaan E ke F

Jadi jika fungsi  $m$  dari himpunan  $E$  ke himpunan  $F$  adalah fungsi bijektif, maka selalu terdapat fungsi dari himpunan  $F$  ke himpunan  $E$ , yang disebut fungsi invers dari fungsi  $m$ .

Jadi jika fungsi  $f$  memetakan himpunan  $A$  ke himpunan  $B$ , dan terdapat fungsi  $g$  yang memetakan himpunan  $B$  ke himpunan  $A$ , maka fungsi  $f$  dan  $g$  masing-masing adalah fungsi bijektif. Dikatakan bahwa fungsi  $g$  adalah invers fungsi  $f$ , dan dinyatakan dengan  $f^{-1}$  (dibaca invers  $f$ ). Juga fungsi  $f$  adalah invers fungsi  $g$ , dan dinyatakan dengan  $g^{-1}$  (dibaca invers  $g$ ).

Ciri grafik fungsi  $f$  yang mempunyai invers dalam domainnya ialah bahwa setiap garis sejajar sumbu  $Y$  memotong grafik di satu titik (karena  $f$  suatu fungsi) dan setiap garis sejajar sumbu  $X$  memotong grafik di satu titik (karena  $f$  mempunyai invers).

TEOREMA: jika fungsi  $f$  monoton dalam domainnya, maka fungsi  $f$  mempunyai invers.

Jika suatu fungsi  $f$  diketahui rumusnya, bagaimanakah cara kita menentukan rumus fungsi inversnya? Untuk dapat menjawab pertanyaan di atas, perhatikan contoh-contoh berikut ini.

#### Contoh Soal

Suatu fungsi  $f$  pada himpunan bilangan real  $R$  ditentukan oleh rumus  $f(x) = 2x - 3$ . Tentukan rumus fungsi inversnya!

**Penyelesaian:**

Cara 1

Memisalkan  $f(x) = y$

$$f(x) = 2x - 3$$

Tukarkan letak  $x$  dan  $y$

$$-2x = -y - 3$$

$$-2x = -(y + 3)$$

$$x = \frac{y+3}{2}$$

Mengganti  $y \rightarrow x$ , dan  $x \rightarrow f^{-1}(x)$

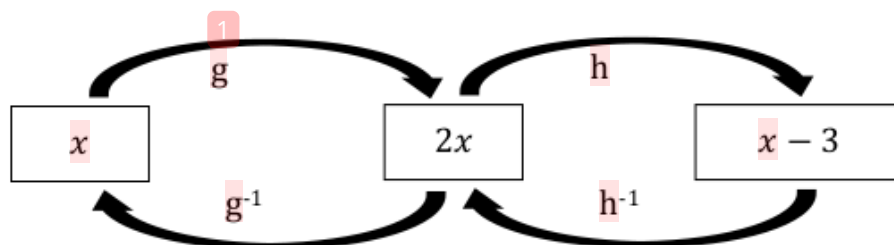
$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2} = \frac{1}{2}(x+3)$$

Cara 2

$$g(x) = 2x \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$$

$$h(x) = 2x - 3 \rightarrow h^{-1}(x) = x + 3$$

Perhatikan **Gambar 3.10**



**Gambar 3.10.** Ilustrasi komposisi fungsi

Dari **Gambar 3.10** kita peroleh

$$f^{-1}(x) = g^{-1} \circ h^{-1}$$

$$= g^{-1}(h^{-1}(x))$$

$$= g^{-1}(x + 3)$$

$$= \frac{1}{2}(x + 3)$$

Jadi bila  $y = 2x - 3$ , maka inversnya ialah  $y = \frac{1}{2}(x + 3)$ .

#### Contoh Soal

1. Tentukan invers dari  $y = \sqrt{x + 1}$ !

**Penyelesaian:**

Hilangkan akar pada ruas kanan

$$y^2 = (\sqrt{x + 1})^2$$

$$y^2 = x + 1$$

Tukarkan letak  $x$  dan  $y$

$$-x = -y^2 + 1$$

$$-x = -(y^2 - 1)$$

$$x = y^2 - 1$$

Mengganti  $y \rightarrow x$ , dan  $x \rightarrow y$

$$y = x^2 - 1$$

Jadi, invers dari  $y = \sqrt{x + 1}$  adalah  $y = x^2 - 1$

Dalam buku ini yang dimaksud dengan “invers” suatu fungsi adalah “fungsi invers”. Misalnya  $f(x) = x^2$  tidak mempunyai (fungsi) invers, karena grafik  $f$  tidak monoton.

Ada buku yang mengatakan bahwa  $f(x) = x^2$  mempunyai invers, tetapi invers ini bukan suatu fungsi. Jadi (relasi) invers dari  $f(x) = x^2$  ialah  $f^{-1}(x) = \pm x$ . Jika dalam buku ini dikatakan bahwa fungsi  $f$  tidak mempunyai invers, artinya fungsi  $f$  mempunyai relasi invers.

## F. INVERS FUNGSI TRIGONOMETRI DAN FUNGSI EKSPONEN

Sekarang akan kita bicarakan tentang invers fungsi trigonometri. Perhatikan fungsi  $f$  yang memetakan  $x$  ke  $\sin x$ . Persamaan dari grafik fungsi  $f$  ialah  $y = \sin x$ .

Untuk menentukan inversnya, kita nyatakan lebih dulu  $x$  dalam  $y$ . Untuk itu hendaknya kita ingat bahwa  $x$  adalah sudut (dalam radian) atau busur yang sinusnya sama dengan  $y$ .

Pernyataan ini dapat kita tulis sebagai  $x =$  busur sinus  $y$  atau  $x = \arcsin y$ , jika  $\arcsin$  adalah singkatan dari perkataan arcus, yang artinya busur. Jadi  $y = \sin x$  dan  $x = \arcsin y$  (dibaca arcus sinus  $y$ ) mempunyai arti yang sama.

Dari  $x = \arcsin y$ , tukarlah tempat  $x$  dan  $y$ . Kita peroleh invers dari  $y = \sin x$ , yaitu  $y = \arcsin x$ . Demikian pula invers dari  $y = \cos x$  adalah  $y = \arccos x$ , dan invers dari  $y = \tan x$  adalah  $y = \arctan x$ . fungsi-fungsi invers ini dinamakan fungsi siklometri. Jadi invers fungsi trigonometri adalah fungsi siklometri. Perhatikan contoh berikut ini.

### Contoh Soal

1. Tentukan nilai:

- $\arcsin \frac{1}{2}$
- $\arccos \frac{1}{2}$
- $\arctan 1$

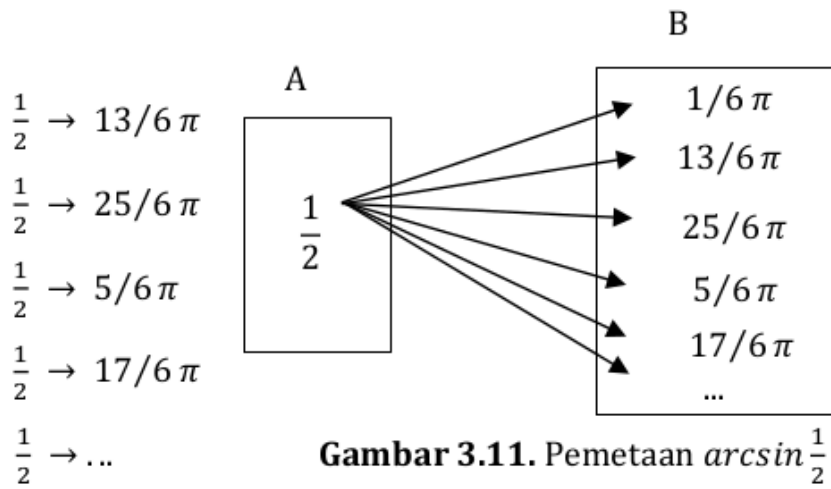
**Penyelesaian:**

- Misalkan  $\arcsin \frac{1}{2} = x$ , artinya  $\sin x = \frac{1}{2}$ . Jadi  $x = 1/6\pi + 2k\pi$  atau  $x = 5/6\pi + 2k\pi$ , jika  $k$  bilangan bulat, maka  $\arcsin \frac{1}{2} = 1/6\pi + 2k\pi$  atau  $5/6\pi + 2k\pi$ . Ternyata bahwa  $\arcsin \frac{1}{2}$  bernilai banyak.
- Misalkan  $\arccos \frac{1}{2} = y$ , artinya  $\cos y = \frac{1}{2}$ . Jadi  $y = \pm 1/3\pi + 2k\pi$ , jika  $k$  bilangan bulat, maka  $\arccos \frac{1}{2} = \pm 1/3\pi + 2k\pi$ .
- Misalkan  $\arctan 1 = z$ , artinya  $\tan z = 1$ . Jadi  $z = \frac{1}{4}\pi + k\pi$ , jika  $k$  bilangan bulat, maka  $\arctan 1 = \frac{1}{4}\pi + k\pi$ .

Sekarang kita perhatikan suatu relasi  $R$  dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  yang ditentukan oleh  $R(x) = \arcsin x$ . Lihat **Gambar 3.11**.

Relasi  $R$  ini ternyata bukan suatu fungsi. Sebab  $\frac{1}{2}$  anggota himpunan  $A$  dikawankan dengan  $\arcsin \frac{1}{2}$  anggota himpunan  $B$ , padahal  $\arcsin \frac{1}{2}$  bernilai banyak. Ini berarti bahwa:

$$\frac{1}{2} \rightarrow 1/6\pi$$



Jadi  $\frac{1}{2}$  anggota himpunan  $A$  mempunyai banyak kawan anggota himpunan  $B$ . maka relasi  $R : x \rightarrow \arcsin x$  bukan suatu fungsi. Relasi  $R$  di atas akan merupakan suatu fungsi, bila setiap  $x$  anggota himpunan  $A$  dikawankan dengan tepat satu nilai  $\arcsin x$  anggota himpunan  $B$ . Sebenarnya  $f(x) = \sin x$  tidak mempunyai invers, karena fungsi itu tidak monoton. Tetapi kita dapat membatasi domainnya pada selang  $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$  supaya fungsi  $f$  mempunyai invers, karena pada selang itu fungsi  $f$  monoton (naik). Jadi invers dari  $f(x) = \sin x$  ( $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ ) ialah  $f^{-1}(x) = \arcsin x$  ( $-\frac{1}{2}\pi \leq \arcsin x \leq \frac{1}{2}\pi$ ).

Jika ditentukan grafik fungsi  $y = f(x)$ , bagaimanakah cara kita menggambar grafik fungsi inversnya?

1. Dari persamaan  $y = f(x)$ , nyatakan  $x$  dalam  $y$ , sehingga kita peroleh  $x = g(y)$ .
2. Jika  $x$  dan  $y$  bertukar tempat, diperoleh persamaan inversnya, yaitu  $y = g(x)$ .

Dari uraian di atas ternyata bahwa bila  $P(a, b)$  terletak pada grafik  $y = f(x)$  atau  $x = g(y)$ , maka titik  $Q(b, a)$  terletak pada grafik  $y = g(x)$ . titik  $P(a, b)$  dan  $Q(b, a)$  terletak simetris terhadap garis  $y = x$ . Berarti grafik  $y = g(x)$  dapat diperoleh dari grafik  $y = f(x)$  dengan mencerminkannya terhadap garis  $y = x$ .

Sifat-sifat logaritma:



Jika  $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$ , dan  $n$  suatu konstanta, maka:

- 1)  $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \times c)$
- 2)  $\log_a b - \log_a c = \log_a (b : c)$
- 3)  $\log_a (b)^n = n \times \log_a b$
- 4)  $\log_a b = \frac{\log_n b}{\log_n a}$

6

Perhatikan contoh berikut ini.

### Contoh Soal

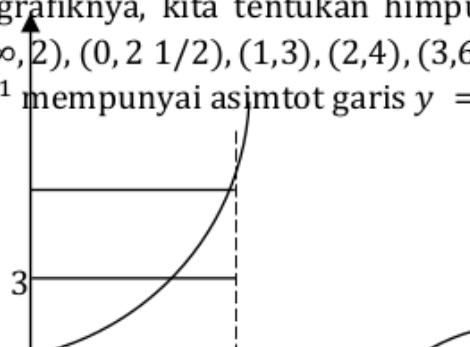
1. Diketahui  $f(x) = 1 + \log_2(x - 2)$ .

- a. Tentukan domain fungsi  $f$ !
- b. Untuk nilai-nilai  $x$  manakah  $f(x) > 0$ ?
- c. Gambarlah grafik fungsi  $f$  dan tentukan persamaan asimtotnya!
- d. Tentukan persamaan fungsi invers, kemudian gambarlah grafiknya!

**Penyelesaian:**

- a.  $f(x)$  real dan tunggal, bila  $x - 2 > 0$  atau  $x > 2$ . Jadi domain  $D = \{x / x > 2\}$ .
- b.  $f(x) = 1 + \log_2(x - 2) > 0$ , maka  $\log_2(x - 2) > \log_2 \frac{1}{2}$ . Kita peroleh  $x - 2 > \frac{1}{2}$  atau  $x > 2\frac{1}{2}$ .
- c. Karena  $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} 1 + \log_2(x - 2) = -\infty$ , maka garis  $x = 2$ , adalah asimtot (tegak). Untuk menggambar grafik  $f(x)$ , kita tentukan himpunan pasangan terurut  $\{(2, -\infty), (2\frac{1}{2}, 0), (3, 1), (4, 2), (6, 3), \dots\}$ . Grafik fungsi  $f$  dapat kita lihat pada gambar 19.
- d. Dari persamaan  $y = 1 + \log_2(x - 2)$ , kita peroleh persamaan fungsi invers, yaitu  $y = 2 + 2^{x-1}$ . Untuk menggambar grafiknya, kita tentukan himpunan pasangan terurut  $\{(-\infty, 2), (0, 2\frac{1}{2}), (1, 3), (2, 4), (3, 6), \dots\}$ . Grafik  $y = 2 + 2^{x-1}$  mempunyai asimtot garis  $y = 2$ .

40



**Gambar 3.12.** Gambar grafik  $y = 1 + \log_2(x - 2)$

2. Diketahui  $f(x) = \ln \frac{1+2x}{1-2x}$ , perubah  $x$  pada himpunan bilangan real.
- Tentukan domain fungsi  $f$ !
  - Untuk nilai  $x$  manakah  $f(x) > 0$ ?
  - Tentukan  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$  dan  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ !
  - Gambarlah grafik fungsi  $f$ !
  - Tentukan persamaan fungsi inversnya!

**Penyelesaian:**

- a.  $f(x)$  real dan tunggal, bila  $\frac{1+2x}{1-2x} > 0$  atau
- $$(1 + 2x)(1 - 2x) > 0$$
- $$\Leftrightarrow (2x + 1)(2x - 1) < 0$$
- $$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Jadi domain  $D = \left\{ \frac{x}{-\frac{1}{2}} < x < \frac{1}{2} \right\}$

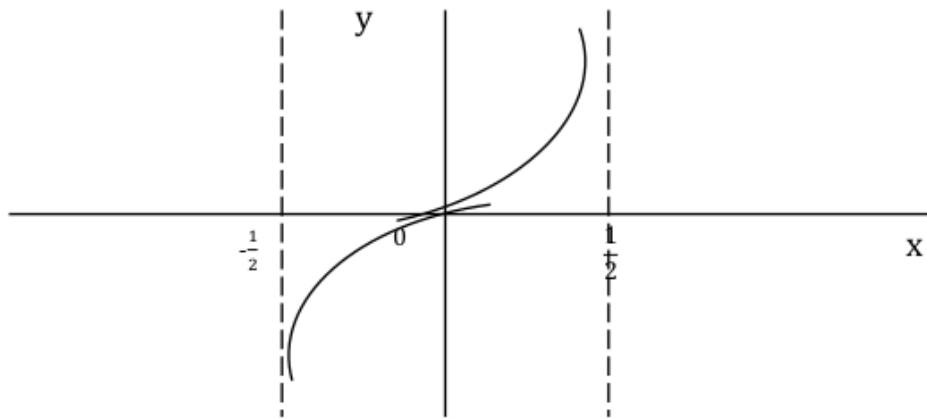
$$\begin{aligned}
 \text{b. } f(x) = \ln \frac{1+2x}{1-2x} > 0, \text{ maka } \frac{1+2x}{1-2x} > 1 \text{ atau} \\
 \frac{1+2x}{1-2x} - 1 > 0 &\Leftrightarrow \frac{4x}{1-2x} > 0 \\
 &\Leftrightarrow 4x(1-2x) > 0 \\
 &\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Jadi  $f(x) > 0$  dalam selang  $0 < x < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \ln \frac{1+2x}{1-2x} = +\infty \text{ dan} \\
 \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \ln \frac{1+2x}{1-2x} = -\infty,
 \end{aligned}$$

Ini berarti bahwa garis-garis  $x = \frac{1}{2}$  dan  $x = -\frac{1}{2}$  merupakan asimtot tegak grafik fungsi  $f$ .

d. Grafik fungsi  $f$  dapat kita lihat pada **Gambar 3.13**.



**Gambar 3.13.** Gambar grafik fungsi  $f(x) = \ln \frac{1+2x}{1-2x}$

e. Dari persamaan  $y = \ln \frac{1+2x}{1-2x}$ , kita nyatakan  $x$  dalam  $y$ . Kita peroleh:

$$\begin{aligned}
 \frac{1+2x}{1-2x} &= e^y \\
 \Leftrightarrow 1+2x &= e^y(1-2x) \\
 \Leftrightarrow 2x &= \frac{e^y - 1}{e^y + 1} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{e^y - 1}{2(e^y + 1)}
 \end{aligned}$$

Jadi  $x$  dan  $y$  bertukar tempat, kita peroleh persamaan fungsi invers, yaitu  $y = \frac{e^x - 1}{2(e^x + 1)}$ .

## G. RANGKUMAN

33

1. Fungsi adalah relasi yang memetakan setiap anggota himpunan domain tepat satu pada anggota kodomain.
2. Domain adalah himpunan daerah asal, kodomain adalah himpunan daerah kawan, sedangkan himpunan semua peta, disebut range atau daerah hasil.
3. Grafik fungsi  $f$  ialah himpunan pasangan terurut  $(x, y)$  dengan  $x$  anggota domain  $D$  dan  $y$  adalah peta dari  $x$  oleh fungsi  $f$ , yang dapat dinyatakan sebagai  $\{(x, y) | y = f(x), x \text{ anggota } D\}$ .
4. Macam-macam fungsi antara lain:
  - a. Fungsi eksplisit dan implisit
  - b. Fungsi rasional
  - c. Fungsi aljabar
  - d. Fungsi transenden
  - e. Fungsi genap
  - f. Fungsi ganjil
  - g. Fungsi periodic
  - h. Fungsi bilangan bulat
  - i. Fungsi naik dan fungsi turun
5. Jika fungsi  $f$  monoton dalam domainnya, maka fungsi  $f$  mempunyai invers.
6. Jika grafik fungsi  $y = f(x)$ , maka cara menggambar grafik fungsi inversnya yaitu:
  - a. Dari persamaan  $y = f(x)$ , nyatakan  $x$  dalam  $y$ , sehingga kita peroleh  $x = g(y)$ .
  - b. Jika  $x$  dan  $y$  bertukar tempat, diperoleh persamaan inversnya, yaitu  $y = g(x)$ .

## H. EVALUASI

Berikut ini disajikan beberapa latihan soal supaya kalian dapat berlatih mengerjakan soal yang berkaitan dengan fungsi.

1. Tentukan domain fungsi-fungsi berikut:

a.  $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}$

b.  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

c.  $h(x) = \ln \frac{x-3}{2x+1}$

d.  $f(x) = {}^x \log 2$

2. Tentukan daerah hasil dari fungsi-fungsi berikut:

a.  $f(x) = \frac{1}{3-\sin 3x}$

b.  $f(x) = \log(x+2)$

3. Gambarlah grafik fungsi yang ditentukan oleh persamaan berikut:

a.  $y = x^2 - 6x + 5$

b.  $y = x^2 - 3|x|$

c.  $y = |x^2 - 3x|$

4. Tentukan fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi ganjil atau genap.

a.  $f(x) = x^2 - 2|x|$

b.  $f(x) = x \ln(x^2 + 4)$

c.  $f(x) = \frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}$

5. Tentukan invers fungsi-fungsi berikut:

a.  $f(x) = 2x + 5$

b.  $f(x) = x^2 + 2x + 1$

c.  $f(x) = 3 - e^{2x}$

6. Diberikan suatu grafik fungsi dengan persamaan  $y = x^2 + 3x + 2$ . Tentukan persamaan inversnya dan gambarlah grafiknya.

7. Diketahui suatu fungsi  $f$  yang dirumuskan sebagai  $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x+1)$ . Tentukan:

a. Domain dan range fungsi  $f$

b. Gambarlah grafik fungsi  $f$

c. Persamaan inversnya

d. Gambarlah grafik invers fungsi  $f$

# BAB 4

## LIMIT DAN KEKONTINUAN

### A. PENDAHULUAN


Topik ini merupakan bagian dari prakalkulus yang menyajikan dasar-dasar untuk kalkulus salah satunya tentang limit. Gagasan tentang inilah yang membedakan kalkulus dengan cabang ilmu matematika lainnya.

Kata "Limit" sebenarnya sering digunakan dalam kehidupan sehari sebagai contoh "Saya mendekati batas kesabaran saya". Beberapa pemakaian kata ini mempunyai hubungan dengan kalkulus. Pemahaman secara intuisi tentang limit dijelaskan sebagai berikut.

### B. DEFINISI LIMIT

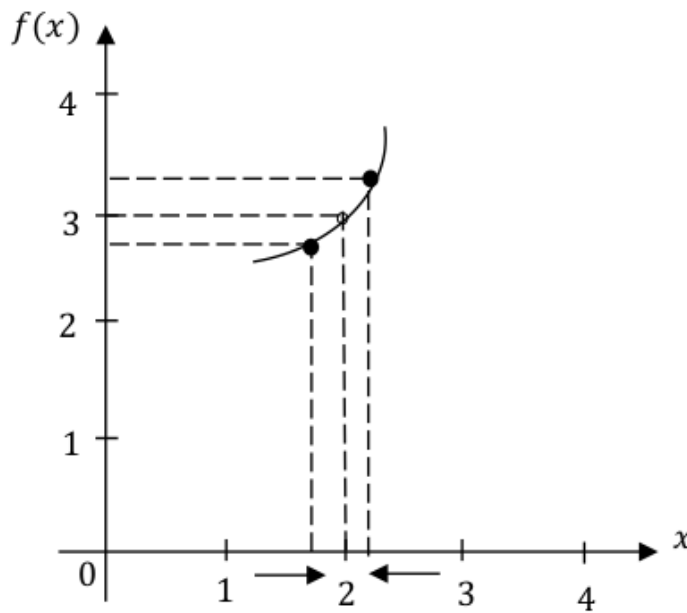
Perhatikan fungsi  $f$  yang dirumuskan sebagai  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$ . Fungsi  $f(x)$  merupakan suatu fungsi rasional yang mempunyai domain  $D_f = \{x/x \neq 2, x \in \mathbb{R}\}$ . Artinya fungsi  $f(x)$  tidak terdefinisi pada  $x = 2$  sebab di titik ini  $f(x)$  bernilai  $\frac{0}{0}$ . Namun apabila ditentukan suatu nilai  $x$  mendekati 2 maka  $f(x)$  dapat ditentukan nilainya. Perhatikan tabel berikut!

Perhatikan tabel berikut!



$x$	...	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	...
$f(x)$	...	2,8	2,98	2,998	3,002	3,02	3,1	...

Berdasarkan tabel diatas dapat dibuat grafik fungsi  $f(x)$  sebagai berikut:



**Gambar 4.1.** Grafik fungsi  $f(x)$  yang monoton

Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa jika nilai  $x$  mendekati 2 maka nilai  $f(x)$  mendekati 3, dan nilai  $f(x)$  tidak pernah tepat berada di 3. Akan tetapi, dapat ditentukan nilai  $f(x)$  sedekat-dekatnya dengan nilai 3 dengan membuat nilai  $x$  sedekat mungkin dengan 2.

Berdasarkan hal tersebut, maka selanjutnya dapat ditentukan suatu selang misalnya  $S$  dimana selang ini berada di sekitar  $x = 2$ . Misalnya selang yang dipilih ini mengakibatkan selisih nilai  $f(x)$  dengan 3 menjadi 0,0005. Selang  $S$  dapat ditentukan sebagai berikut:

Sebab selisih  $f(x)$  dengan 3 kurang dari 0,0005, maka dapat dinyatakan  $|f(x) - 3| < 0,0005$ .

$$\begin{aligned}
 |f(x) - 3| &< 0,0005 \\
 -0,0005 &< f(x) - 3 < 0,0005 \\
 2,9995 &< f(x) < 3,0005 \\
 2,9995 &< 2x - 1 < 3,0005 \\
 3,9995 &< 2x < 4,0005
 \end{aligned}$$

$$1,99975 < x < 2,00025$$

Jadi, selang  $S$  adalah  $1,99975 < x < 2,00025$ .

Selang  $S$  dapat ditulis sebagai  $2 - \delta < x < 2 + \delta$ , dengan  $\delta = 0,00025$ . Nilai  $x \neq 2$  bila  $2 - \delta < x < 2 + \delta$ , maka selang  $S$  dinyatakan sebagai  $0 < |2x - 1| < \delta$ . Hal ini dapat dinyatakan sebagai limit fungsi  $f$  pada  $x = 2$  adalah 3 yang ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-1)(x-2)}{(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) \\ &= 3\end{aligned}$$

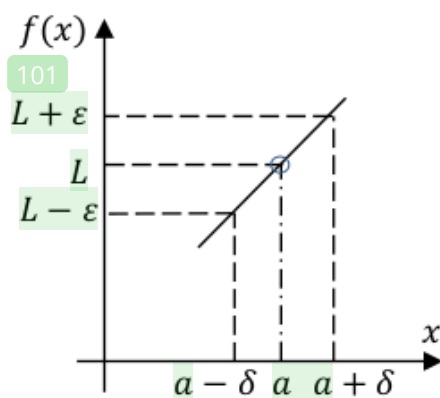
Hal ini berarti bahwa apabila terdapat bilangan kecil  $\varepsilon = 0,0005$  dpt ditentukan bilangan kecil positif  $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}0,0005 = 0,00025$  sehingga untuk semua  $x$  yang memenuhi  $0 < |2x - 1| < \delta$  berlaku  $|f(x) - 3| < \varepsilon$ .

**Definisi Limit:**

Fungsi  $f$  dikatakan mempunyai limit  $L$  pada  $x = a$  dalam domain  $D_f$ , ditulis  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , jika pada setiap bilangan kecil positif  $\delta$ , sehingga untuk semua  $x$  dalam domain  $D_f$  yang memenuhi  $0 < |x - a| < \delta$  berlaku  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

Agar definisi limit lebih jelas, maka perhatikan gambar 4.2 berikut:





**Gambar 4.2.** Letak  $\delta$  dan  $\epsilon$  pada grafik

Perhatikan gambar 4.2 diatas, dari  $|f(x) - L| < \epsilon$  diperoleh  $-\epsilon < f(x) - L < \epsilon$  atau  $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ . Perhatikan bahwa bilangan  $\epsilon$  ditentukan terlebih dulu. Hal ini berarti bahwa kita ditentukan terlebih dulu garis yang sejajar sumbu  $X$  yang dibatasi oleh garis  $y = L - \epsilon$  dan  $y = L + \epsilon$ . Kemudian kita berusaha mendapatkan bilangan kecil positif  $\delta$  sehingga untuk setiap  $x$  dalam selang  $a - \delta < x < a + \delta$ , dengan  $x \neq a$ .

**Contoh Soal**

Dengan menggunakan definisi limit, tunjukkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4!$

**Penyelesaian :**

Secara definisi dituliskan

$$\forall \epsilon > 0, \text{ terdapat } \delta > 0 \text{ sdh } 0 < |x - 2| < \delta, \text{ maka } |x^2 - 4| < \epsilon$$

$$|x^2 - 4| = |x + 2||x - 2| \leq |x| + 2|x - 2| \quad (*)$$

Misalkan,  $\delta = 1$

Maka

$$\begin{aligned} |x - 2| &< 1 \\ -1 &< x - 2 < 1 \\ -1 + 2 &< x - 2 + 2 < 1 + 2 \\ 1 &< x < 3 \end{aligned}$$

Diperoleh,  $|x| < 3$

Kembali ke (\*)

$$|x^2 - 4| < |x| + 2|x - 2|$$

$$\begin{aligned}
 |x^2 - 4| &< |3| + 2|x - 2| \\
 |x^2 - 4| &< 3 + 2|x - 2| \\
 |x^2 - 4| &< 5|x - 2| \\
 |x^2 - 4| &< 5 \underbrace{|x - 2|}_{\delta}
 \end{aligned}$$

Jadi, jika  $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$ , maka  $|x^2 - 4| < \varepsilon$ . Kita pilih  $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$ , maka benar bahwa  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .

### C. TEOREMA LIMIT

89

Berikut ini merupakan beberapa teorema limit yang biasa digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan kalkulus.

11

Andaikan  $n$  bilangan bulat positif,  $t$  konstanta, serta  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di  $a$ , maka:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} t = t$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} tf(x) = t \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
4.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
6.  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ , asalkan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
7.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$
8.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ , asalkan  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$  bilamana  $n$  genap.

## D. KEKONTINUAN

Jika kita diminta untuk menentukan limit suatu fungsi  $f$  pada  $x = a$ , yaitu menentukan  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , maka seringkali kita menghitung nilai  $f(a)$ , yaitu nilai fungsi  $f$  untuk  $x = a$ . Misalnya  $f(x) = x^2 - x - 2$ , maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  dihitung sebagai:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - x - 2 \\ &= 3^2 - 3 - 2 \\ &= 4 \\ &= f(3)\end{aligned}$$

Namun, langkah ini tidak selalu berhasil dilakukan, misalnya jika  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , maka  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \neq f(0) = \frac{0}{0}$  (tidak terdefiniskan). Sedangkan  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Hal ini dapat dikatakan bahwa fungsi  $f$  tidak kontinu. Berdasarkan paparan diatas, maka definisi kekontinuan adalah sebagai berikut:

### Definisi Kekontinuan:

Fungsi  $f$  dikatakan kontinu pada  $x = a$ , bila memenuhi syarat-syarat berikut:

- 1)  $f(a)$  ada (dapat ditentukan nilainya)
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada (artinya  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  dibaca limit kiri sama dengan limit kanan)
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Bila paling sedikit salah satu syarat tidak terpenuhi, maka fungsi  $f$  dikatakan **diskontinu** pada  $x = a$ . Fungsi  $f$  dikatakan kontinu pada selang  $S$ , jika fungsi itu kontinu pada setiap titik pada selang  $S$ .

### Contoh Soal

1. Fungsi  $f$  ditentukan oleh  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ .
  - a) Tunjukkan bahwa fungsi  $f(x)$  diskontinu pada  $x = 2$ .
  - b) Gambarlah grafik fungsi  $f(x)$ .

c) Apakah diskontinuitas pada  $x = 2$  dapat dihapus?

**Penyelesaian :**

a. Untuk menunjukkan bahwa fungsi  $f$  diskontinu, maka harus ada salah satu/lebih syarat yang tidak terpenuhi.

Sekarang mari kita buktikan.

1)  $f(a)$  ada (dapat ditentukan nilainya)

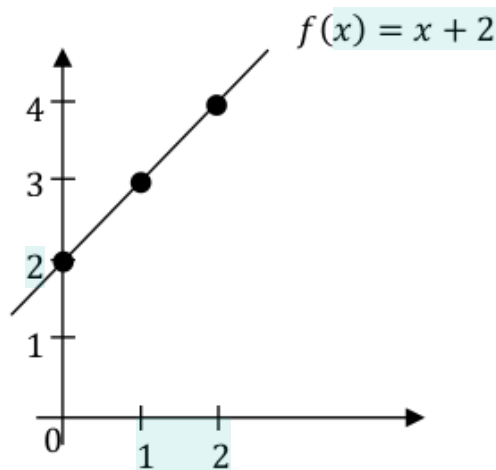
Asumsikan  $x = a$

Jika  $a = 2$ , maka  $f(2) = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0}$  (tidak ada)

Maka  $f(a) = f(2)$  tidak ada nilainya.

Jadi,  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$  diskontinu pada  $x = 2$ .

b.  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2$



c. Dapat, jika fungsi  $f(x)$  didefinisikan sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

2. Fungsi  $f$  ditentukan oleh  $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 1) \\ x + 3 & (x < 1) \end{cases}$ .

a) Tunjukkan bahwa fungsi  $f$  diskontinu pada  $x = 1$ .

b) Gambarlah grafik fungsi  $f$ .

**Penyelesaian :**

a. Untuk menunjukkan bahwa fungsi  $f$  diskontinu, maka harus ada salah satu/lebih syarat yang tidak terpenuhi.

Sekarang mari kita buktikan.

1)  $f(a)$  ada (dapat ditentukan nilainya)

Asumsikan  $x = a$

Jika  $a = 1$ , maka  $f(1) = 1^2 = 1$ , ada nilainya

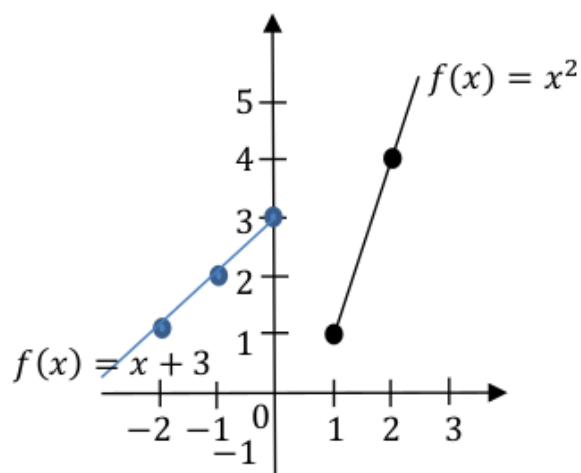
2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 3) = 4$$

Maka  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 3)$

Jadi,  $f(x)$  diskontinu pada  $x = 1$



Berdasarkan beberapa contoh diatas maka dapat diambil suatu kesimpulan yaitu suatu fungsi  $f$  mungkin diskontinu pada titik-titik berikut:

- ✓ Jika  $f$  suatu fungsi pecahan, maka nilai-nilai  $x$  yang menyebabkan penyebut sama dengan nol mungkin terjadi suatu kediskontinuan.

- ✓ Jika fungsi  $f$  dalam selang-selang tertentu berbeda rumusnya, maka pada batas-batas selang itu mungkin terjadi suatu kediskontinuan.

## E. RANGKUMAN

- Definisi limit: Fungsi  $f$  dikatakan mempunyai limit  $L$  pada  $x = a$  dalam domain  $D_f$ , ditulis  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , jika pada setiap bilangan kecil positif  $\delta$ , sehingga untuk semua  $x$  dalam domain  $D_f$  yang memenuhi  $0 < |x - a| < \delta$  berlaku  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .
- Andaikan  $n$  bilangan bulat positif,  $k$  konstanta, serta  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di  $a$ , maka:
  - $\lim_{x \rightarrow a} k = k$
  - $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
  - $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ , asalkan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
  - $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$
  - $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ , asalkan  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$  bilamana  $n$  genap.
- Definisi kekontinuan: Fungsi  $f$  dikatakan kontinu pada  $x = a$ , bila memenuhi syarat-syarat berikut:
  - $f(a)$  ada
  - $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada (artinya  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  dibaca limit kiri sama dengan limit kanan)
  - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

## F. EVALUASI

Setelah mempelajari bab ini, kerjakan latihan soal berikut agar kalian dapat memahami bab ini.

1. Dengan menggunakan definisi limit, buktikan bahwa:

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4x) = 12$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$

d.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 1) = 2$

2. Selidiki apakah  $f(x) = x^2 - 9$  kontinu pada  $x = 3$ !

3. Fungsi  $f$  ditentukan oleh  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{jika } x \leq 2 \\ (2 - x)^2, & \text{jika } x > 2 \end{cases}$ .

a. Tunjukkan bahwa fungsi  $f$  kontinu pada  $x = 2$ .

b. Gambarlah grafik fungsi  $f$ .

4. Fungsi  $f$  ditentukan oleh  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ .

a) Tunjukkan bahwa fungsi  $f$  diskontinu pada  $x = 1$ .

b) Gambarlah grafik fungsi  $f$ .

5. Fungsi  $f$  ditentukan oleh  $f(x) = \frac{x^2-36}{x-6}$ .

a. Tunjukkan bahwa fungsi  $f$  diskontinu pada  $x = 6$ .

b. Gambarlah grafik fungsi  $f$ .

# BAB 5

## TURUNAN

### A. PENDAHULUAN

Turunan merupakan materi pokok dalam pembahasan mata kuliah kalkulus dasar. Materi ini sangat penting karena banyak berkaitan dengan pemahaman pada konsep materi yang lain terutama integral. Selain itu, penerapan materi turunan sering kita jumpai seperti pada bidang ekonomi, menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi, menentukan kemonotonan fungsi, menentukan limit bentuk tak tentu dan lain-lain.

Pada bab ini mahasiswa diharapkan dapat menguasai konsep dalam kalkulus dasar terutama materi turunan. Oleh karena itu, tujuan pembelajaran pada bab ini dirumuskan sebagai berikut:

6. Mahasiswa mampu menemukan kembali konsep dasar turunan berdasarkan dari permasalahan garis singgung dan kecepatan sesaat.
7. Mahasiswa mampu memahami notasi turunan .
8. Mahasiswa dapat membedakan penggunaa derivatif dan diferensial.
9. Mahasiswa dapat menggunakan diferensial sebagai suatu aproksimasi.

### B. DEFINISI TURUNAN

Dasar pemikiran dari turunan (*derivative*) muncul dari dua permasalahan. Menurut Purcell & Varberg (1987) bahwa permasalahan diangkat sebagai pendekatan untuk memahami konsep dasar turunan adalah permasalahan yang berkaitan dengan



garis singgung dan kecepatan sesaat. Untuk lebih jelas perhatikan penjelasan berikut.

Misalkan  $f(x)$  suatu fungsi, seringkali kita jumpai bahwa fungsi tersebut berguna untuk mengetahui seberapa sensitif perubahan  $f(x)$  dari nilai kecil  $x$ . Untuk mengetahui apa itu benar, maka Fowler & Snapp (2014) memberikan pandangan sebagai berikut:

1. Jika  $p(t)$  mewakili posisi suatu benda terhadap waktu, maka laju perubahannya memberikan kecepatan benda.
2. Jika  $v(t)$  mewakili kecepatan suatu benda terhadap waktu, laju perubahannya memberikan percepatan benda.
3. Laju perubahan suatu fungsi dapat membantu kita memperkirakan fungsi yang dengan fungsi sederhana.
4. Laju perubahan suatu fungsi dapat digunakan untuk membantu kita menyelesaikan persamaan yang tidak akan bisa diselesaikan melalui metode lain.

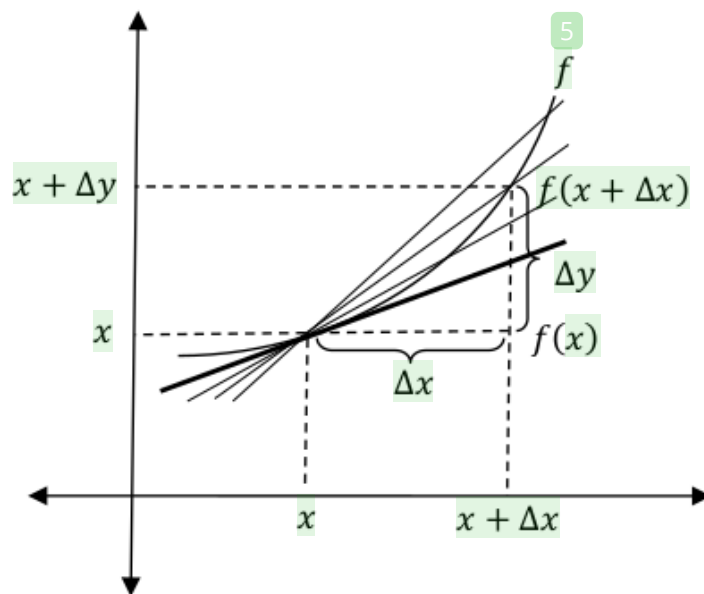
Berdasarkan beberapa pandangan tersebut, maka kita coba melihat konsep turunan sebagai suatu garis singgung dan kecepatan sesaat. Perhatikan penjelasan berikut.

### **1. Garis Singgung**

Laju perubahan suatu fungsi adalah kemiringan garis singgung (Fowler & Snapp, 2014). Untuk saat ini, pertimbangkan definisi informal dari garis singgung berikut:

“Diberikan fungsi  $f(x)$ , jika seseorang dapat "memperbesar" pada  $f(x)$  secukupnya sehingga  $f(x)$  tampak sebagai garis lurus, maka garis itu adalah garis singgung  $f(x)$  pada titik yang ditentukan oleh  $x$ ”.

Berdasarkan Euclides, pengertian garis singgung yaitu sebuah garis yang memotong kurva di satu titik. Garis singgung grafik pada suatu titik dapat dihitung dengan melakukan suatu pendekatan garis yang melewati titik itu serta titik lain pada grafik yang sama. Perhatikan ilustrasi pada gambar 5.1 berikut.

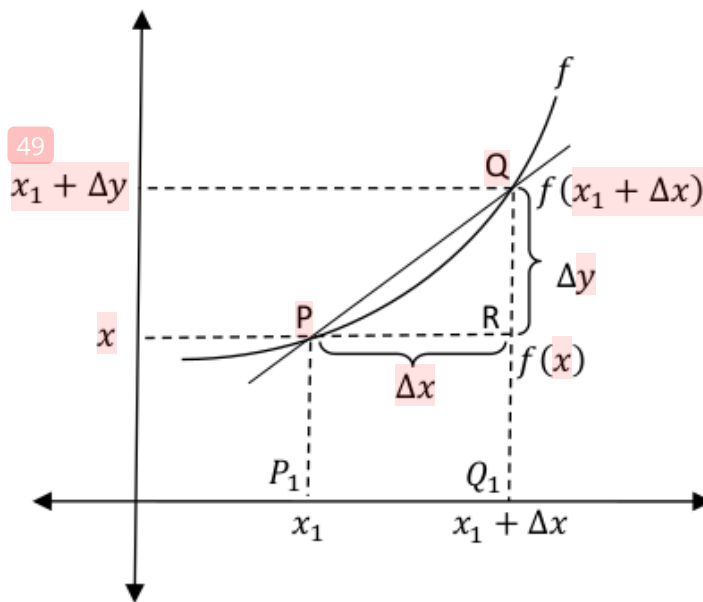


**Gambar 5.1.** garis singgung dapat ditemukan sebagai batas dari garis-garis potong

Kita mengilustrasikan definisi informal ini dari gambar 5.1 diatas. Turunan dari fungsi  $f(x)$  di  $x$  adalah kemiringan garis singgung di  $x$ . Dalam mencari kemiringan garis ini, kita anggap garis potong adalah garis yang memotong secara lokal pada dua titik. Kemiringan garis potong yang melewati titik  $(x, f(x))$  dan  $((x + \Delta x), f(x + \Delta x))$  diberikan sebagai berikut:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Pendefinisian diatas mungkin belum cukup membawa pada define formal dari turunan (*derivative*). Perhatikan gambar 5.2 dibawah ini, misalkan pada grafik itu diambil sebarang titik yaitu  $P(x_1, y_1)$  dan titik  $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$  dimana titik  $Q$  letaknya sangat dekat dengan titik  $P$ . Dari titik  $P$  ke titik  $Q$  terjadi perubahan nilai yang kecil untuk  $x_1$  yaitu sebesar  $\Delta x$ . Akibatnya, berturut-turut  $f(x_1)$  mengalami penambahan sebesar  $\Delta y$  sehingga diperoleh  $f(x_1 + \Delta y)$ . Perhatikan gambar 5.2 berikut.

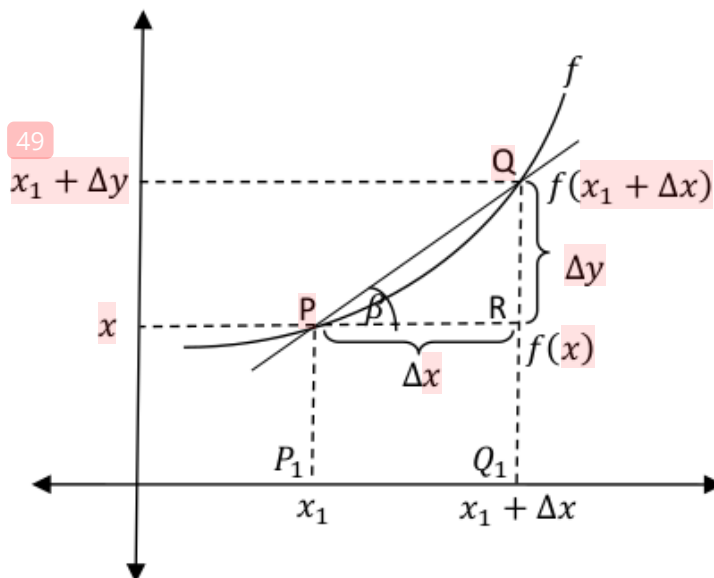


**Gambar 5.2.** Perubahan nilai kecil dari  $x$

Berdasarkan gambar 5.2, misalkan  $Q_1$  adalah hasil proyeksi dari titik  $Q$  pada sumbu  $X$ . Selanjutnya, dari titik  $P$  dibuat garis yang sejajar dengan sumbu  $X$  sehingga  $PR = \Delta x$ , maka diperoleh:

$$\begin{aligned} RQ &= Q_1Q - Q_1R \\ &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \end{aligned}$$

Berdasarkan kurva  $f$  dan garis  $PQ$  maka dapat ditentukan sebuah sudut yang dibentuk dari perpotongan garis  $PQ$  dan  $PR$ . Perhatikan gambar 5.3 berikut.

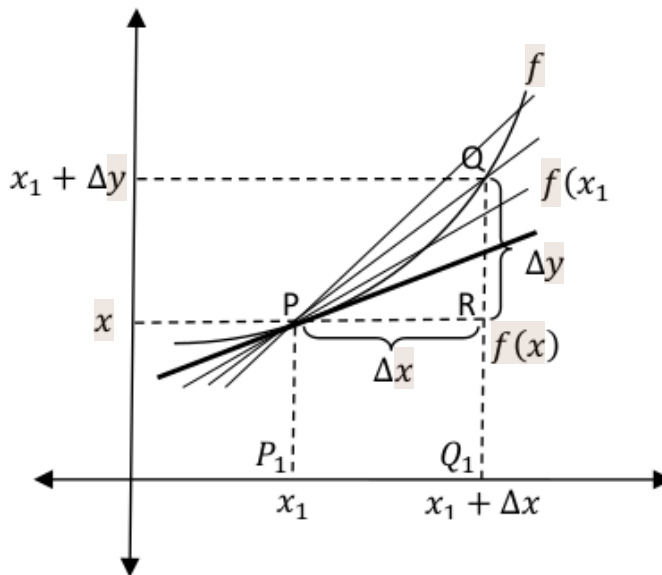


**Gambar 5.3.** Sudut  $\beta$  yang dibentuk perpotongan garis  $PQ$  dan  $PR$

Berdasarkan gambar 5.3, maka dapat diperoleh perbandingan trigonometri yaitu:

$$\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Perhatikan bahwa  $\Delta x$  adalah diferensial (beda) dua nilai  $x$  yaitu  $x_1 + \Delta x$  dan  $x_1$ , selanjutnya disebut diferensial  $x$ . Bentuk  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  disebut **hasil bagi diferensial  $y$  ke  $x$** .



**Gambar 5.4.** Titik  $Q$  bergerak mendekati titik  $P$

Berdasarkan ilustrasi gambar 5.4, jika titik  $Q$  bergerak sepanjang kurva mendekati titik  $P$  berarti  $\Delta x \rightarrow 0$ , maka garis potong  $PQ$  menjadi garis singgung di titik  $P$  pada kurva, sedangkan sudut  $\beta$  menjadi sudut  $\alpha$  antara garis singgung di titik  $P$  pada kurva dengan sumbu  $X$  positif. Jadi diperoleh:

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Apabila limit ini ada, maka  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$  disebut derivatif atau turunan dari fungsi  $f$  pada titik  $x = x_1$ , dan biasanya dinyatakan sebagai  $y'$ ,  $\frac{dy}{dx}$ , atau  $f'(x_1)$ . Dalam geometri,  $f'(x_1)$  menyatakan gradien garis singgung di titik  $P(x_1, y_1)$  pada kurva  $y = f(x)$ .

**Contoh Soal**

1. Tentukan kemiringan garis singgung kurva  $y = 3x^2 - x$  pada  $x = 1$ .

**Penyelesaian:**

Garis singgung  $m$  diperoleh dengan cara menentukan nilai  $f'(x)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 m = f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)] - [3x^2 - x]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - x - \Delta x] - [3x^2 - x]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2 - \Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x - 1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 6x + 3\Delta x - 1 \\
 &= 6x - 1
 \end{aligned}$$

Karena garis singgung melalui  $x = 1$ , maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 m = f'(x) &= 6x - 1 \\
 f'(1) &= 6(1) - 1
 \end{aligned}$$

Jadi, kemiringan garis singgung kurva  $y = 3x^2 - x$  pada  $x = 1$  adalah  $m = 3$ .

2. Tentukan bentuk persamaan garis singgung dari kurva  $y = -x^2 + 2x - 3$  yang melalui titik  $P(-1, 3)$ .

**Penyelesaian:**

Persamaan garis yang melalui sebuah titik  $(x_1, y_1)$  dan gradien  $m$  dirumuskan dalam  $y - y_1 = m(x - x_1)$ . Garis singgung  $m$  diperoleh dengan cara menentukan nilai  $f'(x)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 m = f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[-(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - 3] - [-x^2 + 2x - 3]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[-x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x - 3] - [-x^2 + 2x - 3]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2x\Delta x - \Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x + 1 \\
 &= 2x + 1
 \end{aligned}$$

Karena garis singgung melalui  $x = 1$ , maka  $m = f'(1) = 2(1) + 1 = 3$ , sehingga persamaan garis singgung yang melalui  $m = 3$  dan titik  $P(1, 2)$  adalah:

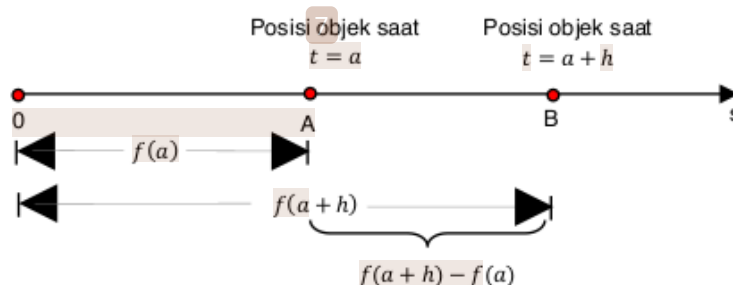
$$\begin{aligned}
 y - 2 &= 3(x - 1) \\
 y - 2 &= 3x - 3 \\
 y &= 3x - 3 + 2 \\
 y &= 3x - 1
 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung yang melalui sebuah titik  $P(1, 2)$  pada kurva  $y = -x^2 + 2x - 3$  adalah  $y = 3x - 1$ .

## 2. Kecepatan Sesaat

Masalah lain yang muncul sebagai konsep dasar dari turunan adalah kecepatan sesat. Misalkan suatu kendaraan berpindah dari tempat mula-mula menuju ke tempat lain yang menempuh jarak 90 km selama 3 jam, maka kecepatan rata-rata dari kendaraan tersebut adalah 30 km/jam. Ini berarti, kecepatan rata-rata ialah jarak dari posisi mula-mula ke posisi selanjutnya dibagi waktu tempuhnya.

Misalkan terdapat suatu objek yang bergerak sepanjang garis lurus dan memenuhi persamaan  $s = f(t)$  dengan  $s$  menyatakan jarak yang ditempuh oleh objek dari titik asal sampai waktu  $t$ . Perhatikan gambar ilustrasi berikut:



Gambar 5.5. Perpindahan objek

Berdasarkan ilustrasi diatas, maka kecepatan rata-rata dari posisi  $A$  ke posisi  $B$  dapat ditentukan sebagai  $\bar{v}_s = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ . Jika  $h \rightarrow 0$  maka kecepatan sesaat dinyatakan sebagai nilai limit dari kecepatan rata-rata yang ditulis  $v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ .

### Contoh Soal

1. Tentukan besar kecepatan sesaat dari sebuah objek yang jatuh, beranjak dari posisi diam pada  $t = 2,7$  detik yang dinyatakan dalam fungsi  $f(t) = 16t^2 - 3$ .

#### Penyelesaian:

Kita hitung kecepatan pada  $t = x$  detik.

$$\begin{aligned}
 t' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(16(x+\Delta x)^2-3)-(16x^2-3)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{16(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)-3-16x^2+3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{16x^2+32x\Delta x+16\Delta x^2-16x^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(32x+16\Delta x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 32x + 16\Delta x \\
 &= 32x
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, kecepatan pada  $t = 2,7$  detik adalah  $32(2,7) = 86,4$  meter/detik.

2. Sebuah partikel bergerak sepanjang garis koordinat yang dirumuskan dalam  $s = \sqrt{3t - 2}$  dimana  $s$  adalah jarak yang mempunyai arah dinyatakan dalam cm yang diukur dari titik asal menuju ke titik tujuan setelah  $t$  detik. Hitung kecepatan partikel pada akhir 2 detik.

#### Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 v &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5(3+\Delta x)+1}-\sqrt{5(3)+1}}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16+5\Delta x}-4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{16+5\Delta x}-4}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{16+5\Delta x}+4}{\sqrt{16+5\Delta x}+4} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{16+5\Delta x-16}{\Delta x(\sqrt{16+5\Delta x}+4)} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{16+5\Delta x}+4} \\
&= \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

Jadi, kecepatan pada akhir 3 detik pertama adalah  $\frac{5}{8}$  cm/detik.

Dari pemaparan kedua permasalahan diatas, selanjutnya diberikan definisi turunan sebagai berikut:

**Defisini: 2**

Turunan fungsi  $f$  adalah fungsi lain dari  $f'$  (dibaca " $f$  aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan  $x$  adalah

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Asalkan limitnya ada (Purcell & Varberg, 1987).

**Contoh Soal**

1. Diberikan suatu fungsi  $f(x) = 9x - 4$ . Tentukan  $f'(2)$ .

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[9(x+\Delta x)-4]-[9x-4]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{9x+9\Delta x-4-9x+4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{9\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 9 \\
&= 9
\end{aligned}$$

2. Diberikan suatu fungsi  $f(x) = x^3 + 2x$ . Tentukan  $f'(-1)$ .

**Penyelesaian:**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)) - (x^3 + 2x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + (2x + 2\Delta x)] - x^3 - 2x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2) \\
&= 3x^2 + 2 \\
f'(-1) &= 3(-1)^2 + 2 \\
&= 5
\end{aligned}$$

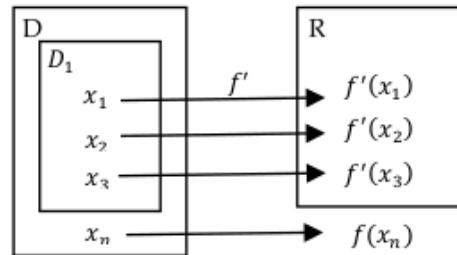
### C. DEFINISI DIFERENSIAL

Diferensial merupakan istilah lain dari turunan. Apabila  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  ada, maka berarti bahwa fungsi tersebut terdiferensialkan di  $x$ . Proses mencari turunan disebut sebagai diferensiasi. Apakah *derivative* dan diferensial itu sama, marilah kita perhatikan penjelasan berikut.

Misalkan diberikan suatu fungsi  $f$  dengan domain  $D$ . Apabila  $x_1$  anggota  $D$ , maka  $f(x_1)$  ada dan tunggal. Jika  $D_1$  himpunan bagian dari  $D$  dimana fungsi  $f$  mempunyai derivatif, maka:

- ✓ Jika  $x_1$  anggota dari  $D_1$  berarti bahwa  $f(x_1)$  ada dan tunggal serta juga  $f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$  ada dan tunggal.
- ✓ Jika  $x_2$  anggota dari  $D_1$  berarti bahwa  $f(x_2)$  ada dan tunggal serta juga  $f'(x_2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2 + \Delta x) - f(x_2)}{\Delta x}$  ada dan tunggal.
- ✓ Jika  $x_n$  bukan anggota dari  $D_1$  berarti bahwa  $f(x_n)$  ada dan tunggal tetapi  $f'(x_n)$  tidak ada atau tidak tunggal.

Penjelasan diatas dapat lebih dipahami dengan menyatakannya dalam sebuah diagram panah. Perhatikan gambar berikut:



**Gambar 5.6.** Pemetaan  $f'$

Perhatikan gambar 5.6, untuk setiap anggota  $D_1$  diperoleh nilai  $f'$  yang tunggal. Hal ini berarti bahwa kita peroleh fungsi baru yaitu  $f'$  dengan domain  $D_1$ . Fungsi baru ini disebut fungsi derivatif dari fungsi  $f$ . Proses mendapatkan fungsi  $f'$  dari fungsi  $f$  disebut turunan.

Berdasarkan analogi diatas, fungsi  $f$  dikatakan diferensiabel (dapat diturunkan) apabila memenuhi syarat-syarat berikut:

- 1)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  ada  
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  ini dikatakan ada apabila hasil limit kiri bernilai sama dengan limit kanan.
- 2) Domain  $D_1$  dari fungsi  $f'$  sama dengan domain  $D$  fungsi  $f$  ( $D = D_1$ ).

Dari uraian diatas, agar lebih memahami maka perhatikan teorema dibawah ini.

Apabila kurva mempunyai sebuah garis singgung pada suatu titik, maka kurva tersebut tidak bisa melompat atau sangat berayun pada titik tersebut.

**Teorema**

Jika  $f'(c)$  ada maka  $f$  kontinu dititik  $c$ .

**Bukti:**

Karena fungsi  $f$  diferensiabel pada  $x = c$ , berarti  $f'(c)$  ada. Kita perlu menunjukkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c), x \neq c$$

$$\begin{aligned}
 \text{Karena } \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \left[ f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow c} f(c) + \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \\
 &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\
 &= f(c)
 \end{aligned}$$

Hal ini berarti bahwa  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ , sehingga dapat disimpulkan bahwa fungsi  $f$  kontinu pada  $x = c$ .

Teorema diatas menjelaskan bahwa apabila terdapat suatu fungsi yang mempunyaia turunan di sebuah titik, maka fungsi tersebut kontinu di titik itu. Namun, tidak berlaku sebaliknya karena ada fungsi yang kontinu pada suatu titik tetapi tidak mempunyai derivatif pada titik itu. Jadi kekontinuan suatu fungsi adalah syarat perlu untuk adanya derivatif, namun bukan syarat cukup. Perhatikan contoh-contoh berikut:

#### Contoh Soal

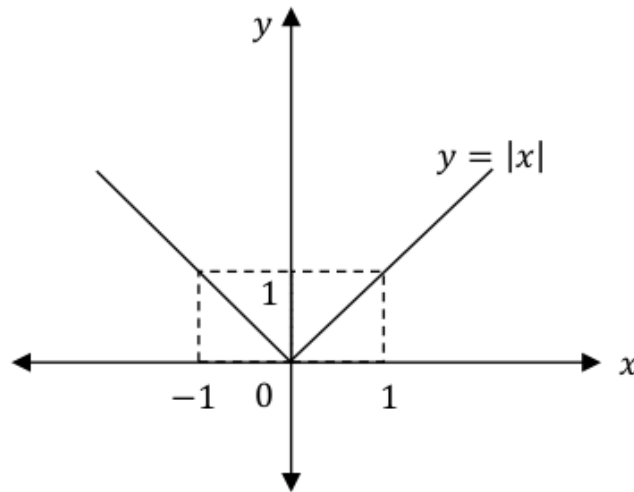
1. Diberikan suatu fungsi  $f$  yang dirumuskan sebaga  $f(x) = |x|$ .
  - a. Gambarlah grafik  $f(x)$ .
  - b. Tunjukkan bahwa fungsi  $f$  kontinu pada titik  $x = 0$ .
  - c. Tunjukkan bahwa fungsi  $f$  terdiferensiabel pada titik  $x = 0$ .

#### Penyelesaian:

- a. Fungsi  $(x) = |x|$  dapat dinaytakan sebagai suatu persamaan  $y = |x|$ . Karena fungsi tersebut merupakan fungsi nilai mutlak maka dapat dinyatakan sebagai:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{untuk } x \geq 0 \\ -x & \text{untuk } x < 0 \end{cases}$$

Oleh karena itu, gambar grafiknya merupakan dua garis lurus yang bercabang.



b. Untuk menunjukkan bahwa fungsi  $f$  kontinu pada titik  $x = 0$ , maka perlu ditunjukkan syarat-syarat berikut:

i)  $f(a)$  ada

Karena akan ditunjukkan bahwa fungsi  $f$  kontinu pada titik  $a = 0$ , maka nilai

$$f(a) = f(0) = |0| = 0$$

Jadi, karena  $f(0) = 0$  maka berarti  $f(a)$  ada.

ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada

Untuk menentukan apakah limitnya ada, maka perlu ditunjukkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

- Limit kiri diperoleh:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$

- Limit kanan diperoleh:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$

Karena limit kiri bernilai sama dengan limit kanan maka berarti  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  ada.

iii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Berdasarkan syarat (i) dan (ii) diperoleh bahwa  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  dan  $f(0) = 0$ , maka dapat disimpulkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

Karena fungsi  $f$  memenuhi ketiga syarat diatas, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi  $f$  kontinu pada titik  $x = 0$ .

c. Untuk menunjukkan bahwa fungsi  $f$  dapat diturunkan maka perlu memenuhi syarat suatu fungsi terdiferensiabel, yaitu:

i)  $f'(x)$  ada

Untuk menunjukkan apakah  $f'(x)$  ada, yaitu berlaku bahwa

$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ , maka dapat dicari sebagai berikut:

- Pada nilai  $\Delta x < 0$ , maka berlaku sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-(x+\Delta x) - (-x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \\ &= -1\end{aligned}$$

- Pada nilai  $\Delta x \geq 0$ , maka berlaku:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= 1\end{aligned}$$

Karena  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  maka dapat disimpulkan bahwa  $f'(0)$  tidak ada.

ii) Domain fungsi memenuhi  $D = D_1$ .

Karena  $f'(0)$  tidak ada maka  $x = 0$  adalah anggota dari  $D_1$ , sehingga  $D \neq D_1$ .

Berdasarkan penjabaran diatas, yaitu karena  $f'(0)$  tidak ada dan  $D \neq D_1$ , maka disimpulkan bahwa fungsi  $f$  tidak terdiferensiabel pada titik  $x = 0$ .

## D. NOTASI TURUNAN

Sejauh kita membahas turunan, kita ketahui bahwa notasi turunan dilambangkan dalam  $f'$ . Ternyata selain  $f'$ , turunan dapat dinotasikan dalam bentuk lain. Seperti apa notasi lain dari turunan? Perhatikan penjelasan berikut!!

### 1. Notasi Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz adalah seorang dari dua penemu utama kalkulus yang menyatakan bahwa  $\frac{dy}{dx}$  adalah suatu hasil bagi dari dua bilangan yang sangat kecil. Notasi  $\frac{dy}{dx}$  merupakan lambang baku dari turunan, yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

### Contoh Soal

Diketahui  $y = x^2 - 2$ , tentukan nilai  $\frac{dy}{dx}$ .

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((x+\Delta x)^2 - 2) - (x^2 - 2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 2 - x^2 + 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) \\ &= 2x \end{aligned}$$

## 2. Notasi $y'$

Notasi  $y'$  dibaca sebagai turunan dari  $y$ . Penggunaan notasi ini sama dengan  $f'(x)$  yang mana hal ini mirip dengan ketika kalian ingin menggambarkan suatu grafik  $y = f(x)$ . Penggunaan notasi ini lebih praktis digunakan. Perhatikan contoh berikut.

### Contoh Soal

Diberikan suatu persamaan  $y = 3x + 2$ , tentukan nilai  $y'$ .

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x+\Delta x) + 2 - (3x + 2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3 \end{aligned}$$

$$= 3$$

### 3. Notasi $D$

Notasi  $D$  merupakan singkatan dari kata diferensial (Palopo, 2020). Penulisan notasi ini dinyatakan dalam  $D_x y$  yang dibaca sebagai “turunan  $y$  terhadap  $x$ ”. Perhatikan contoh berikut.

#### Contoh Soal

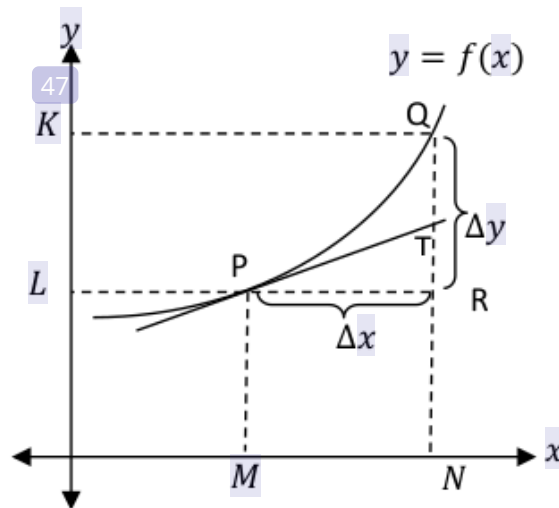
Diketahui bahwa  $y = 2x - 1$ , maka tentukan  $D_x y$ .

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} D_x y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x+\Delta x) - 1 - (2x - 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

## E. APROKSIMASI

Pada sub topik sebelumnya, telah dibahas tentang notasi Leibniz yaitu  $\frac{dy}{dx}$ . Notasi  $\frac{dy}{dx}$  dapat diartikan sebagai hasil bagi dua diferensiabel. Namun sekarang kita coba pandang  $\frac{dy}{dx}$  dalam arti lain. Perhatikan ilustrasi dari gambar berikut:



**Gambar 5.7.** Arti lain  $\frac{dy}{dx}$  diperoleh dari grafik fungsi  $y = f(x)$

Berdasarkan gambar 5.7, pada kurva ditentukan dua titik yaitu titik  $P(x, y)$  dan  $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$  yang berdekatan letaknya. Dari hal itu dapat dinyatakan bahwa  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{LK}{MN} = \frac{RQ}{PR} =$  gradien garis singgung  $PQ$  dan  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ .

Berdasarkan gradien garis singgung di titik  $P$  yang memotong  $RQ$  di titik  $T$ , maka dapat diperoleh:

$$f'(x) = \frac{RT}{PR} = \frac{RT}{\Delta x} \text{ atau } RT = f'(x) \cdot \Delta x$$

Bentuk inilah yang disebut sebagai diferensial  $y$  (yang sesuai dengan perubahan  $\Delta x$  pada  $x$ ) dimana lambangnya ditulis sebagai  $dy$ . Akibatnya dapat dinyatakan bawah  $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ .

Kita ingin memandang  $dy$  untuk mendapatkan arti diferensial yang bersesuaian itu. Oleh karena itu, kita perhatikan fungsi identitas yaitu  $f(x) = x$ . Dari fungsi identitas tersebut diperoleh:

$$\begin{aligned} dy &= f'(x) \cdot \Delta x \\ &= 1 \cdot \Delta x \\ &= \Delta x \dots\dots (i) \end{aligned}$$

Karena dalam fungsi identitas  $y = f(x) = x$ , maka dapat dituliskan:

$$dy = d[f(x)] = dx \dots\dots\dots (ii)$$



Berdasarkan persamaan (i) dan (ii) diperoleh  $dx = \Delta x$ . Jadi apabila diketahui  $y = f(x)$ , maka:

$$dy = d[f(x)] = f'(x) dx$$

Berdasarkan penjabaran diatas, selanjutnya dijabarkan definisi formal dari diferensial.

### **Defisini Diferensial**

Andaikan  $y = f(x)$  terdiferensialkan di  $x$  serta misalnya  $dx$  diferensial dari suatu variabel bebas  $x$ , dimana  $x$  menyatakan pertambahan. Diferensial  $dy$  dari variabel tak bebas  $y$  didefinisikan sebagai:

$$dy = f'(x) dx$$

Diferensial memerankan juga suatu nilai aproksimasi. Perhatikan gambar 5.7 diatas. Andaikan  $y = f(x)$ , selanjutnya jika  $x$  diberikan tambahan sebesar  $\Delta x$ , maka  $y$  juga menerima tambahan yang berpadanan sebesar  $\Delta y$ , yang nilainya dapat dihipotesis oleh  $dy$ , jadi  $f(x + \Delta x)$  diaproksimasi oleh:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x) \Delta x$$

### **Contoh Soal**

1. Tanpa menggunakan kalkulator, tentukan nilai aproksimasi dari  $\sqrt{4,6}$  dan  $\sqrt{8,2}$ .

#### **Penyelesaian:**

Pandang grafik fungsi  $y = f(x) = \sqrt{x}$ , maka  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

- o Misal  $x = 4$  dan  $\Delta x = 0,6$  maka  $f(4) = \sqrt{4} = 2$  dan  $f'(x) \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (0,6) = 0,15$ .

Jadi, diperoleh nilai aproksimasi:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x) \Delta x$$

$$f(\sqrt{4 + 0,6}) = f(\sqrt{4,6}) = 2 + 0,15 = 2,15$$

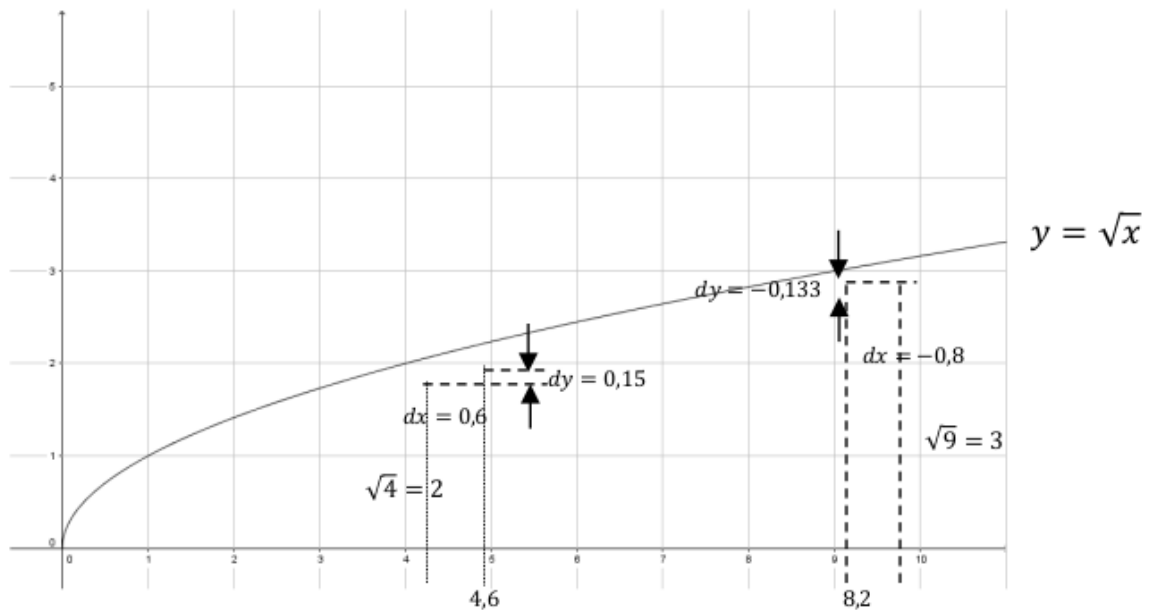
- Misal  $x = 9$  dan  $\Delta x = -0,8$  maka  $f(9) = \sqrt{9} = 3$  dan  $f'(x) \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot (-0,8) = -0,133$ .

Jadi, diperoleh nilai aproksimasi:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x) \Delta x$$

$$f(\sqrt{9 - 0,8}) = f(\sqrt{8,2}) = 3 - 0,133 = 2,867$$

Nilai aproksimasi 2,15 dan 2,867 dibandingkan dengan nilai sebenarnya dapat diperhatikan pada grafik berikut:



2. Tentukan aproksimasi dari pertambahan luas sebuah gelembung sabun di saat jari-jarinya mengalami penambahan dari 3 cm menjadi 3,025 cm (gunakan diferensial).

**Penyelesaian:**

Luas gelembung bola sabun dirumuskan sebagai  $A = 4\pi r^2$ . Kita dapat mengaproksimasi nilai sebenarnya,  $\Delta A$  dengan diferensial  $dA$ , dimana  $dA = 8\pi r$

Pada  $r = 3$  dan  $dr = \Delta r = 0,025$ , sehingga diperoleh:

$$dA = 8\pi(3)(0,025) \approx 1,885 \text{ cm}$$

## F. RANGKUMAN

1. Turunan fungsi  $f$  yaitu fungsi lain dari  $f'$  (dibaca " $f$  aksen") dimana nilainya pada sebarang bilangan  $x$  dinyatakan sebagai  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ , jika ada limitnya.
2. Andaikan  $y = f(x)$  terdiferensialkan pada  $x$  dan andaikan bahwa  $dx$  diferensial dari variabel bebas  $x$ , menyatakan pertambahan sebarang dari  $x$ . Diferensial yang bersesuaian dengan  $dy$  dari variabel tak bebas  $y$  didefinisikan oleh  $dy = f'(x) dx$ .
3. Turunan dinotasikan dalam  $f'(x)$ ,  $y'$ ,  $\frac{dy}{dx}$  dan  $D_x y$ .
4. Diferensial memerankan juga suatu nilai aproksimasi yang nilainya dapat dihitung dengan  $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x) \Delta x$ .

## G. EVALUASI

Agar kalian dapat lebih memahami bab ini, maka cobalah mengerjakan soal berikut dengan tepat!

1. Tentukan persamaan garis singgung di titik  $P(-1, -1)$  pada kurva  $y = x^3$ .
2. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik  $R(0, -1)$  pada kurva  $y = \frac{2}{x-2}$ .
3. Sebuah benda menjelajahi garis sehingga posisi  $s$  nya adalah  $s = 2t^2 + 2$  setelah  $t$  detik.
  - a. Berapa kecepatan rata-rata pada selang  $2 \leq t \leq 3$ ?
  - b. Tentukan kecepatan rata-rata pada  $t = 2$ .
4. Apabila terdapat sebuah partikel yang bergerak sepanjang garis koordinat sehingga jarak berarah dari titik asal ke titik setelah  $t$  detik adalah  $-t^2 + 4t$  meter. Kapan partikel akan berhenti (yaitu, bilamana kecepatannya menjadi nol)?
5. Diketahui  $g(x) = |2x - 2| + x$ .
  - a. Selidikilah apakah  $g(x)$  kontinu pada  $x = 1$ .
  - b. Selidikilah apakah  $g(x)$  diferensiabel pada  $x = 1$ .
  - c. Gambarlah grafik  $g(x)$ .

6. Fungsi  $f$  ditentukan oleh  $f(x) = \begin{cases} x + 2 & (x < 0) \\ -x + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$ .
- Selidikilah apakah  $f(x)$  kontinu pada  $x = 0$ .
  - Selidikilah apakah  $g(x)$  diferensiabel pada  $x = 0$ .
7. Tanpa menggunakan kalkulator, tentukan nilai aproksimasi dari  $\sqrt{35,9}$
8. Aproksimasi nilai volume material suatu tempurung bola yang mempunyai jari-jari 5 cm dan mempunyai jari-jari luar 5,125 cm.

# BAB 6

## ATURAN PENCARIAN TURUNAN

### A. PENDAHULUAN

Pada bab ini membahas tentang aturan pencarian turunan. Materi ini merupakan salah satu bagian penting dalam turunan. Aturan pencarian turunan digunakan untuk menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan turunan. Penggunaan aturan pencarian turunan lebih praktis karena tidak perlu menjabarkan proses mencari turunan seperti bab sebelumnya yaitu menggunakan penjabaran sesuai definisi turunan.

Tujuan mempelajari materi ini adalah agar mahasiswa dapat membuktikan teorema dalam aturan pencarian turunan dan menggunakannya dalam menyelesaikan soal yang berkaitan dengan turunan. Agar lebih jelas maka perhatikan pemaparan berikut ini.

### B. ATURAN PENCARIAN TURUNAN FUNGSI ALJABAR

Dalam menentukan turunan suatu fungsi dapat dinyatakan dalam notasi Leibniz yaitu  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ . Proses pencarian turunan suatu fungsi langsung dari definisi turunan yakni dengan menyusun hasil bagi selisih

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

dan menghitung limitnya, membutuhkan waktu yang lama dan membosankan. Oleh karena itu untuk memperpendek proses tersebut maka digunakan teorema-teorema dalam aturan pencarian turunan yang dijelaskan sebagai berikut:

#### 1. Aturan Kostanta

Fungsi konstanta  $f(x) = k$  jika digambarkan dalam sebuah grafik maka akan menunjukkan sebuah garis lurus

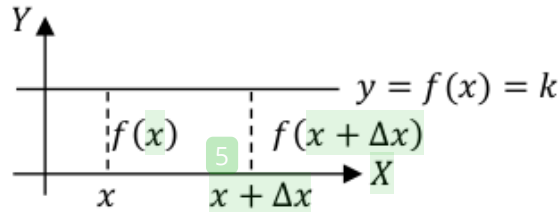
sehingga kemiringannya adalah nol. Konsep inilah yang dapat digunakan untuk memahami teorema aturan fungsi konstanta.

**Teorema 6.1: Aturan Fungsi Konstanta**

Jika  $f(x) = k$ , dengan  $k$  suatu konstanta maka untuk sebarang  $x$  berlaku  $f'(x) = 0$ .

**Bukti:**

Grafik fungsi  $f(x) = k$  sejajar sumbu  $X$ . Perhatikan gambar dibawah ini!



**Gambar 6.1.** Grafik fungsi konstan

Karena  $f(x) = k$ , maka  $f(x + \Delta x) = k$ , jadi diperoleh:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k - k}{\Delta x} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Jadi  $f'(x) = 0$

**2. Aturan Fungsi Identitas**

Grafik fungsi  $f(x) = x$  merupakan grafik yang berupa garis lurus dengan kemiringannya adalah satu, sehingga dari inilah kita dapat menduga bahwa turunan dari fungsi ini adalah satu.

**Teorema 6.2: Aturan Fungsi Identitas**

Jika  $f(x) = x$ , maka  $f'(x) = 1$ .

**Bukti:**

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 1$$

Jadi,  $f'(x) dx = 1$

### 3. Aturan Kelipatan Konstanta

#### **Teorema 6.3: Aturan Kelipatan Konstanta**

Jika  $k$  suatu konstanta dan  $f$  suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka  $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$

**Bukti:**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k \cdot f(x+\Delta x) - k \cdot f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= k \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= k \cdot f'(x)$$

#### **Contoh Soal**

Tentukan turunan fungsi dari  $f(x) = 2x$

**Penyelesaian:**

Misalkan  $f(x) = x$  dan  $k = 2$ , maka turunan dari fungsi tersebut adalah:

Karena  $f'(x) = 1$  maka  $f'(x) = k \cdot f'(x)$

$$f'(x) = 2 \cdot 1$$

$$f'(x) = 2$$

### 4. Aturan Pangkat

#### **Teorema 6.4: Aturan Pangkat**

Jika  $f(x) = x^n$ , dengan  $n$  bilangan-bilangan bulat positif, maka  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

**Bukti:**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n] - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x [nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \dots + n\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}]}{\Delta x} \\
f'(x) &= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

### Contoh Soal

Tentukan turunan fungsi dari  $f(x) = x^4$

**Penyelesaian:**

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f'(x) = 4x^{4-1}$$

$$f'(x) = 4x^3$$

## 5. Aturan Jumlah

### Teorema 6.5: Aturan Jumlah

Jika  $f$  dan  $g$  fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ .

**Bukti:**

$$\begin{aligned}
(f + g)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

### Contoh Soal

Tentukan turunan dari  $h(x) = x^3 + 2x^2$

**Penyelesaian:**

Fungsi dari  $h(x)$  merupakan penjumlahan dua fungsi misalnya dari  $f(x) = x^3$  dan  $g(x) = 2x^2$ , maka turunan dari  $h(x)$  adalah:

$$(h)'(x) = (f + g)'(x)$$



$$\begin{aligned}
 &= f'(x) + g'(x) \\
 &= 3x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} \\
 &= 3x^2 + 4x
 \end{aligned}$$

## 6. Aturan Selisih

### **Teorema 6.6: Aturan Selisih**

Jika  $f$  dan  $g$  fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka  $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ .

**Bukti:**

$$\begin{aligned}
 (f - g)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) - g(x+\Delta x)] - [f(x) - g(x)]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
 &= f'(x) - g'(x)
 \end{aligned}$$

### **Contoh Soal**

Tentukan turunan fungsi dari  $x^4 - 4x^2$

**Penyelesaian:**

$$(f + g)'(x) = (x^4 - 4x^2)' = 4x^3 - 8x$$

Misal  $f(x) = x^4$  dan  $g(x) = 4x^2$ , maka diperoleh:

$$f'(x) = 4x^{4-1}, \quad g'(x) = 2 \cdot 4x^{2-1}$$

$$f'(x) = 4x^3, \quad g'(x) = 8x$$

$$\text{Jadi, } (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 4x^3 - 8x$$

## 7. Aturan Hasil Kali

### **Teorema 6.7: Aturan Hasil Kali**

Jika  $f$  dan  $g$  fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka  $(f \cdot g)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$ .

**Bukti:**

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x)] - [f(x) \cdot g(x)]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x+\Delta x)g(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ f(x+\Delta x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= g(x)f'(x) + f(x)g'(x)
 \end{aligned}$$

### Contoh Soal

Tentukan turunan dari  $(x^2 + 2)(2x)$ !

**Penyelesaian:**

Misal,  $f(x) = (x^2 + 2)$ ,  $g(x) = (2x)$

Maka  $f'(x) = 2x$ ,  $g'(x) = 2$

$$\begin{aligned}
 \text{Jadi, } g(x)f'(x) + f(x)g'(x) &= (2x)(2x) + (x^2 + 2)(2) \\
 &= 4x^2 + 2x^2 + 4 \\
 &= 6x^2 + 4
 \end{aligned}$$

## 8. Aturan Hasil Bagi

### Teorema 6.8: Aturan Hasil Bagi

Jika  $f$  dan  $g$  fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

**Bukti:**

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x)}{\Delta x} \right] \cdot \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \left[ g(x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \cdot \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \right\} \\
 &= \left[ g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

### Contoh Soal

Tentukan turunan dari  $h(x) = \frac{2x^2+5}{x}$ ,  $x \neq 0$

**Penyelesaian:**

Misal  $f(x) = 2x^2 + 5$  dan  $g(x) = x$  maka diperoleh:

$$f'(x) = 4x \quad \text{dan} \quad g'(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi, } h'(x) &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \\ &= \frac{(x)(4x) - (2x^2+5)(1)}{x^2} \\ &= \frac{4x^2 - (2x^2+5)}{x^2} \\ &= \frac{2x^2+5}{x^2} \end{aligned}$$

Setelah membuktikan teorema diatas, selanjutnya kita coba menerapkannya dalam menyelesaikan soal berikut dengan menyatkan turunan menggunakan notasi Leibniz  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ .

### Contoh Soal

Tentukan turunan fungsi yang dinyatakan dalam persamaan berikut:

1.  $y = 3x + 1$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(3x)}{dx} + \frac{d(1)}{dx} \\ &= 3 \frac{d(x)}{dx} + \frac{d(1)}{dx} \\ &= 3 + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

2.  $y = -7x^3 - 5x$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(-7x^3)}{dx} - \frac{d(5x)}{dx} \\ &= -7 \frac{d(x^3)}{dx} - 5 \frac{d(x)}{dx} \end{aligned}$$

$$= -7(3x^2) - 5$$

$$= -21x^2 - 5$$

3.  $y = \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(\frac{1}{2}x^2)}{dx} + \frac{d(2\sqrt{x})}{dx} - \frac{d(\frac{3}{x^2})}{dx} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d(x^2)}{dx} + 2 \frac{d(\sqrt{x})}{dx} - 3 \frac{d(\frac{1}{x^2})}{dx} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d(x^2)}{dx} + 2 \frac{d(x^{1/2})}{dx} - 3 \frac{d(x^{-2})}{dx} \\ &= \frac{1}{2} 2x + 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} - 3(-2)x^{-3} \\ &= x + x^{-1/2} + 6x^{-3} \\ &= x + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3} \end{aligned}$$

4.  $y = (x - 1)\sqrt{x}$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sqrt{x} \frac{d(x-1)}{dx} + (x-1) \frac{d(x^{1/2})}{dx} \\ &= \sqrt{x} + (x-1) \frac{1}{2} (x^{-1/2}) \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} (x-1) \end{aligned}$$

5.  $y = \frac{2x-1}{2x+1}$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(2x+1) \frac{d(2x-1)}{dx} - (2x-1) \frac{d(2x+1)}{dx}}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{(2x+1)2 - (2x-1)2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{4x+2-4x+2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{4}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

Terdapat juga beberapa teorema-teorema atau rumus-rumus diferensial suatu fungsi yang berkaitan dengan bentuk eksponen dan logaritma, yaitu sebagai berikut:

**Teorema 6.9:**

Jika  $f(x) = \ln x$  fungsi yang terdiferensialkan maka  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

**Bukti:**

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{(x+\Delta x)}{x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \\
 &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \\
 &= \frac{1}{x} \ln \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right]
 \end{aligned}$$

Misalkan  $n = \frac{x}{\Delta x}$ , maka  $n \rightarrow \infty$  jika  $\Delta x \rightarrow 0$ , sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{x} \ln \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \\
 &= \frac{1}{x} \ln e \\
 &= \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

**Teorema 6.10:**

Jika  $f(x) = a^x$  fungsi yang terdiferensialkan maka  $f'(x) = a^x \ln a$  atau  $dy = a^x \ln a dx$ .

**Bukti:**

Dalam membuktikan teorema ini, akan lebih mudah apabila turunan fungsinya dinyatakan dalam notasi Leibniz  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ .

Misalkan  $y = a^x$  maka  $\ln y = \ln a^x$ , dan apabila kedua ruas didiferensialkan diperoleh:

$$d(\ln y) = d(\ln a^x)$$

$$d(\ln y) = d(x \ln a)$$

$$\frac{1}{y} dy = \ln a \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln a$$

### Contoh Soal

Tentukan turunan  $\frac{dy}{dx}$  dari persamaan grafik fungsi berikut:

1.  $y = x + 2 \ln x$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(x)}{dx} + \frac{d(2 \ln x)}{dx} \\ &= \frac{dx}{dx} + 2 \frac{d(\ln x)}{dx} \\ &= 1 + \frac{2}{x} \end{aligned}$$

2.  $y = x^3 + 3^x$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(3^x)}{dx} \\ &= 3x^2 + 3^x \ln 3 \end{aligned}$$

## C. TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Persoalan-persoalan terkait roda yang berputar dan kecepatan pada titik secara tidak langsung mengarah pada pembahasan pada sinus dan kosinus beserta turunannya. Adapun turunan fungsi sinus dan kosinus dijabarkan sebagai berikut:

### **Teorema 6.11:**

Fungsi-fungsi  $f(x) = \sin x$  dan  $g(x) = \cos x$  keduanya didiferensialkan, maka  $f'(x) = \cos x$  dan  $g'(x) = -\sin x$

**Bukti:**

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{1}{2}(x+\Delta x+x) \cdot \sin \frac{1}{2}(x+\Delta x-x)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{1}{2}(2x+\Delta x) \cdot \sin \frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right) \cdot \sin \frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x} \times \frac{1/2}{1/2} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right) \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \\&= \cos x \cdot 1 \\&= \cos x\end{aligned}$$

Jadi turunan dari  $f(x) = \sin x$  adalah  $f'(x) = \cos x$ .

**Bukti:**

$$\begin{aligned}g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos \Delta x - 1) - \sin x \sin \Delta x}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \cos x \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos x \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\&= \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\&= \cos x (0) - \sin x (1) \\&= -\sin x\end{aligned}$$

Jadi turunan dari  $f(x) = \cos x$  adalah  $f'(x) = -\sin x$ .

**Teorema 6.12:**

fungsi  $f(x) = \tan x$  terdiferensialkan, maka  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

**Bukti:**

Misalkan  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , maka:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx} \\ &= \frac{\cos x \cdot d(\sin x) - \sin x \cdot d(\cos x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

**Teorema 6.13:**

fungsi  $f(x) = \operatorname{cosec} x$  terdiferensialkan, maka

$$f'(x) = -\frac{\cotan x}{\sin x}.$$

Untuk membuktikan turunan dari  $f(x) = \operatorname{cosec} x$  dapat menggunakan teorema hasil bagi dengan cara mengubah  $f(x)$  terlebih dahulu menjadi  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ . Untuk pembuktiannya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

**Teorema 6.14:**

fungsi  $f(x) = \sec x$  terdiferensialkan, maka  $f'(x) = \frac{\tan x}{\cos x}$

Untuk membuktikan turunan dari  $f(x) = \sec x$  dapat menggunakan teorema hasil bagi dengan cara mengubah  $f(x)$  terlebih dahulu menjadi  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ . Untuk pembuktiannya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

**Teorema 6.15:**

fungsi  $f(x) = \cotan x$  terdiferensialkan, maka  $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

**Bukti:**

Misalkan  $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , maka:

$$f'(x) = \frac{d\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{dx}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{40 \sin x \cdot d(\cos x) - \cos x \cdot d(\sin x)}{(\sin x)^2} \\
&= \frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(\sin x)^2} \\
&= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} \\
&= -\frac{1}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

**Teorema 6.16:**

fungsi  $f(x) = \arcsin x$  dan  $g(x) = \arccos x$  masing-masing terdiferensialkan, maka  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  dan  $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**Bukti:**

Misalkan  $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$ , selanjutnya apabila kedua ruas didiferensialkan diperoleh:

$$\begin{aligned}
x &= \sin y \\
d(x) &= d(\sin y) \\
dx &= \cos y \, dy \\
dy &= \frac{1}{\cos y} \, dx \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Selanjutnya menurut rumus  $\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi$ , diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\arcsin x)}{dx} + \frac{d(\arccos x)}{dx} &= \frac{d(\frac{1}{2}\pi)}{dx} \\
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{d(\arccos x)}{dx} &= 0 \\
\frac{d(\arccos x)}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
g'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

**Teorema 6.17:**

fungsi  $f(x) = \arctan x$  dan  $g(x) = \operatorname{arccot} x$  masing-masing terdiferensialkan, maka  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  dan  $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

**Bukti:**

Misalkan  $y = \arctan x$   $\Leftrightarrow x = \tan y$ , selanjutnya apabila kedua ruas didiferensialkan diperoleh:

$$\begin{aligned}x &= \tan y \\d(x) &= d(\tan y) \\dx &= \frac{1}{\cos^2 y} dy \\ \frac{dy}{dx} &= \cos^2 y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+\tan^2 y} \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Untuk teroema  $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ , silahkan dibuktikan sendiri oleh pembaca sebagai latihan.

**Contoh Soal**

Tentukan turunan fungsi trigonometri berikut:

1.  $f(x) = 3 \sin x + 2 \cos x$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3 \frac{d(\sin x)}{dx} + 2 \frac{d(\cos x)}{dx} \\ &= 3 \cos x + 2(-\sin x) \\ &= 3 \cos x - 2 \sin x\end{aligned}$$

2.  $f(x) = 6 \sin x \cos x$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos x \frac{d(6 \sin x)}{dx} + 6 \sin x \frac{d(\cos x)}{dx} \\ &= \cos x \cos x + 6 \sin x (-\sin x) \\ &= \cos^2 x - 6 \sin^2 x\end{aligned}$$

3.  $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$

**Penyelesaian:**

$$f'(x) = \frac{\sin x \frac{d(1-\cos x)}{dx} - (1-\cos x) \frac{d(\sin x)}{dx}}{\sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{46 \sin x(\sin x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} \\
&= \frac{\sin^2 x - (\cos x - \cos^2 x)}{\sin^2 x} \\
&= \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

4.  $f(x) = 2 \arcsin x - \frac{1}{4} x^2$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2 \frac{d(\arcsin x)}{dx} - \frac{1}{4} \frac{d(x^2)}{dx} \\
&= 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4} \cdot 2x \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} x
\end{aligned}$$

5.  $f(x) = x^2 \operatorname{arccot} x + \frac{\cos x}{2x^3}$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \operatorname{arccot} x \frac{d(x^2)}{dx} + x^2 d(\operatorname{arccot} x) + \\
&\frac{2x^3 \frac{d(\cos x)}{dx} - \cos x \frac{d(2x^3)}{dx}}{(2x^3)^2} \\
&= \operatorname{arccot} x \cdot 2x + x^2 \cdot \left( -\frac{1}{1+x^2} \right) + \frac{2x^3(-\sin x) - \cos x(6x^2)}{4x^6} \\
&= 2x \operatorname{arccot} x - \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{2x^3 \sin x + 6x^2 \cos x}{4x^6} \\
&= 2x \operatorname{arccot} x - \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{x \sin x + 3 \cos x}{2x^4}
\end{aligned}$$

## D. RANGKUMAN

1. Aturan pencarian turunan fungsi aljabar meliputi:

- Jika  $f(x) = k$  maka berlaku  $f'(x) = 0$ .
- Jika  $f(x) = x$  maka  $f'(x) = 1$ .
- Jika  $k$  suatu konstanta dan  $f$  suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka  $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$ .
- Jika  $f(x) = x^n$ , dengan  $n$  bilangan-bilangan bulat positif, maka  $f'(x) = nx^{n-1}$ .
- Jika  $f$  dan  $g$  fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ .
- Jika  $f$  dan  $g$  fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka  $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ .

- g. Jika  $f$  dan  $g$  fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka  $(f \cdot g)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$ .
- h. Jika  $f$  dan  $g$  fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ .
- i. Jika  $f(x) = \ln x$  maka  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .
- j. Jika  $f(x) = a^x$  maka  $f'(x) = a^x \ln a$  atau  $dy = a^x \ln a dx$ .
2. Aturan pencarian turunan fungsi trigonometri meliputi:
- a. Jika  $f(x) = \sin x$  dan  $g(x) = \cos x$  maka  $f'(x) = \cos x$  dan  $g'(x) = -\sin x$ .
- b. Jika  $f(x) = \tan x$  maka  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ .
- c. Jika  $f(x) = \operatorname{cosec} x$  maka  $f'(x) = -\frac{\cotan x}{\sin^2 x}$ .
- d. Jika  $f(x) = \sec x$  terdiferensialkan, maka  $f'(x) = \frac{\tan x}{\cos^2 x}$ .
- e. Jika  $f(x) = \cotan x$  maka  $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .
- f. Jika  $f(x) = \arcsin x$  dan  $g(x) = \arccos x$  maka  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  dan  $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
- g. Jika  $f(x) = \arctan x$  dan  $g(x) = \operatorname{arccotan} x$  maka  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  dan  $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ .

## E. EVALUASI

Tentukan turunan fungsi-fungsi aljabar berikut:

- $f(x) = \frac{2}{3x} - \frac{2}{3}$
- $f(x) = \frac{1}{2x} + 2x$
- $f(x) = \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$
- $f(x) = \frac{x}{2} + 2\sqrt{x}$
- $f(x) = (2x + 1)^2$
- $f(x) = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$
- $f(x) = (3x^2 + 2x)(x^4 - 3x + 1)$
- $f(x) = \frac{1}{4x^2 - 3x + 9}$
- $f(x) = \frac{5x - 4}{3x^2 + 1}$
- $f(x) = x^3 - \frac{1}{x} \ln x + x^2 2^x$

Tentukan turunan fungsi-fungsi trigonometri berikut:

- $f(x) = 3 \sin x - 5 \cos x$
- $f(x) = 2 \sin x \cos x$
- $f(x) = \frac{1}{4} \sec x + 2x^3$
- $f(x) = (x^2 - x)(1 + \sin x)$

$$3. f(x) = x^2 \tan x$$

$$4. f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$5. f(x) = \frac{x^2 + 1}{x \sin x}$$

$$8. f(x) = 2x \arccos x + \frac{1}{2} x^4$$

$$9. f(x) = \frac{x-4}{\operatorname{arccot} x}$$

$$10. f(x) = \frac{2}{\arcsin x} - \frac{\sin x}{x^2 + 3}$$

# BAB 7

## ATURAN RANTAI

### A. PENDAHULUAN

Bab akhir dalam buku ini membahas tentang aturan rantai serta turunan tingkat tinggi. Materi aturan rantai ini berkaitan dengan materi yang telah dipelajari pada bab sebelumnya yaitu tentang aturan pencarian turunan. Materi tersebut menjadi dasar dalam mempelajari bab aturan rantai dan turunan tingkat tinggi.

Materi aturan rantai ini sangat berguna bagi mahasiswa karena dapat mempersingkat proses penyelesaian masalah turunan yang lebih kompleks. Oleh karena itu, dalam bab ini dirumuskan tujuan pembelajaran pada materi aturan rantai dan turunan tingkat tinggi antara lain:

10. Mahasiswa mampu menerapkan aturan rantai dalam pemecahan masalah.
11. Mahasiswa mampu memahami turunan tingkat tinggi.
12. Mahasiswa dapat menggunakan aturan rantai dalam menyelesaikan soal turunan yang lebih kompleks.

### B. ATURAN RANTAI

Materi aturan rantai digunakan untuk menyelesaikan soal-soal turunan yang lebih kompleks. Seperti apa aturan rantai itu? Agar lebih jelas perhatikan analogi berikut ini.

Bayangkan usaha untuk menentukan turunan dari  $f(x) = (x^2 + 3x - 4)^{30}$ . Pertama kita harus mengalikan 30 faktor-faktor kuadrat  $x^2 + 3x - 4$  dan kemudian mendiferensialkan polinom berderajat 60 yang dihasilkan. Langkah tersebut sangat tidak efektif dan membutuhkan waktu yang lama, sehingga untuk

menyelesaikan permasalahan tersebut dapat diterapkan suatu aturan rantai.

### 1. Notasi $D_x$

Agar lebih memahami aturan rantai terlebih dahulu kita pahami notasi  $D_x$ . Jika suatu masalah menyangkut lebih dari satu variabel, maka akan sangat membantu apabila terdapat penulisan (notasi) yang menunjukkan variabel mana yang sedang ditinjau. Misalnya,  $y = 2x^3$  dan kita ingin memperlakukan  $x$  sebagai variabel bebas dan 2 sebagai konstanta, maka dengan menulis  $D_x y$  akan diperoleh:

$$D_x y = D_x(2x^3) = 2D_x(x^3) = 2 \cdot 3x^2$$

Lambang  $D_x y$  ini dapat dibaca sebagai "turunan  $y$  terhadap  $x$ ".

### 2. Pendiferensialan Fungsi komposit

Misalkan Dina dapat mengetik 2 kali lebih cepat dibandingkan dengan Dona. Sedangkan Dona mampu mengetik 3 kali lebih cepat daripada Dono, dan Dina dapat mengetik  $2 \times 3 = 6$  kali lebih cepat daripada Dono. Kedua laju tersebut dikalikan.

Andaikan  $y = f(u)$  dan  $u = g(x)$ , menentukan fungsi komposit  $y = f(g(x))$ . Karena suatu turunan menunjukkan laju perubahan, kita dapat mengatakan bahwa:

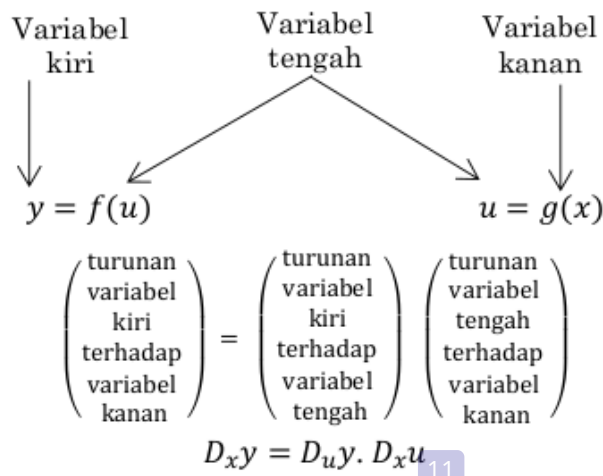
- $y$  berubah  $D_u y$  kali secepat  $u$
- $x$  berubah  $D_x u$  kali secepat  $x$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa  $y$  berubah  $D_u y \cdot D_x u$  kali secepat  $x$ . Analogi ini menunjukkan cara kerja aturan rantai. Perhatikan terome dari aturan rantai berikut:

#### **Teorema Aturan Rantai**

Andaikan  $y = f(u)$  dan  $u = g(x)$  menentukan fungsi komposit  $y = f(g(x))$ . Jika  $g$  terdiferensialkan di  $x$  dan  $f$  terdiferensialkan di  $u = g(x)$ , maka  $f \circ g$  terdiferensialkan di  $x$  dan  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ .

Teorema aturan rantai tersebut seperti terlihat lebih rumit. Oleh karena itu, agar lebih bisa dipahami, maka perhatikan analogi pada gambar 7.1 Berikut.



**Gambar 7.1.** Analogi penerapan aturan rantai

Aturan rantai digunakan untuk menyelesaikan turunan fungsi komposit. Namun, dalam menurunkan fungsi-fungsi di dalamnya tersebut tidak terlepas dari konsep aturan turunan pada materi sebelumnya. Perhatikan contoh soal berikut!

**Contoh Soal**

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut:

1.  $f(x) = (x^2 + 3x - 4)^{30}$

**Penyelesaian:**

Misalkan  $y = u^{30}$  dan  $u = x^2 + 3x - 4$

$$\begin{aligned} D_x y &= D_u y \cdot D_x u \\ &= D_u (u^{30}) D_x (x^2 + 3x - 4) \\ &= (30u^{29}) \cdot (2x + 3) \\ &= 30(x^2 + 3x - 4)^{29} \cdot (2x + 3) \end{aligned}$$

2.  $f(x) = \frac{1}{(2x^5 - 7)^3}$

**Penyelesaian:**

Misalkan  $y = \frac{1}{u^3} = u^{-3}$  dan  $u = 2x^5 - 7$



$$\begin{aligned}
 D_x y &= D_u y \cdot D_x u \\
 &= D_u (u^{-3}) \cdot D_x (2x^5 - 7) \\
 &= (-3u^{-4})(10x^4) \\
 &= \frac{-30x^4}{u^4} \\
 &= \frac{-30x^4}{(2x^5 - 7)^4}
 \end{aligned}$$

Perhatikan pembahasn tentang notasi turunan pada bab sebelumnya. Berdasarkan notasi Leibniz menyatakan bahwa  $\frac{dy}{dx}$  sebagai lambang operator mempunyai arti yang sama dengan  $D_x$ . Dalam penggunaan aturan rantai pada soal, akan lebih mudah jika dinyatakan menggunakan notaso Leibniz. Aturan rantai dalam notasi Leibniz mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

**Contoh Soal**

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut:

1.  $y = \cos(3x + 1)$

**Penyelesaian:**

Misalkan  $y = \cos u$  dan  $u = 3x + 1$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= \frac{d(\cos u)}{du} \cdot \frac{d(3x+1)}{dx} \\
 &= -\sin u \cdot 3 \\
 &= -3 \sin(3x + 1)
 \end{aligned}$$

2.  $y = \sec^2(4x + 3)$

**Penyelesaian:**

Misalkan  $y = u^{-2}$ ,  $u = \cos v$  dan  $v = 4x + 3$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \\
 &= \frac{d(u^{-2})}{du} \cdot \frac{d(\cos v)}{dv} \cdot \frac{d(4x+3)}{dx} \\
 &= (-2u^{-3})(-\sin v)(4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 8(\cos v)^{-3} \cdot \sin v \\
 &= 8(\cos(4x + 3))^{-3} \cdot \sin(4x + 3) \\
 &= \frac{8 \sin(4x+3)}{\cos^3(4x+3)}
 \end{aligned}$$

3. Tentukan turunan  $y = \ln(2x + 1)$

**Penyelesaian:**

Misalkan  $y = \ln u$  dan  $u = 2x + 1$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= \frac{d(\ln u)}{du} \cdot \frac{d(2x+1)}{dx} \\
 &= \left(\frac{1}{u}\right) (2) \\
 &= \frac{2}{2x+1}
 \end{aligned}$$

4. Tentukan  $dy$  jika diketahui:

a.  $y = \ln^2(1 - x^3)$

b.  $y = \ln_2(1 - x^3)$

**Penyelesaian:**

a.  $y = \ln^2(1 - x^3) = [\ln(1 - x^3)]^2$

Misalkan  $y = u^2$ ,  $u = \ln v$  dan  $v = 1 - x^3$  maka:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \\
 dy &= \frac{d(u^2)}{du} \cdot \frac{d(\ln v)}{dv} \cdot \frac{d(1-x^3)}{dx} dx \\
 dy &= (2u) \left(\frac{1}{v}\right) (-3x^2) dx \\
 dy &= (2 \ln v) \left(\frac{1}{v}\right) (-3x^2) dx \\
 dy &= (2 \ln(1 - x^3)) \left(\frac{1}{(1-x^3)}\right) (-3x^2) dx \\
 dy &= \frac{-6x^2 \ln(1-x^3)}{(1-x^3)} dx
 \end{aligned}$$

b.  $y = \ln_2(1 - x^3) = \ln \ln(1 - x^3)$

Misalkan  $y = \ln u$ ,  $u = \ln v$  dan  $v = 1 - x^3$  maka:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \\
 dy &= \frac{d(\ln u)}{du} \cdot \frac{d(\ln v)}{dv} \cdot \frac{d(1-x^3)}{dx} dx \\
 dy &= \left(\frac{1}{u}\right) \left(\frac{1}{v}\right) (-3x^2) dx
 \end{aligned}$$

$$dy = \left(\frac{1}{\ln v}\right) \left(\frac{1}{v}\right) (-3x^2) dx$$

$$dy = \left(\frac{1}{\ln(1-x^3)}\right) \left(\frac{1}{(1-x^3)}\right) (-3x^2) dx$$

$$dy = \frac{-3x^2}{(1-x^3) \cdot \ln(1-x^3)} dx$$

5. Tentukan turunan dari  $y = {}^2\log(2x^2 + x)$

**Penyelesaian:**

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut maka terlebih dahulu kita ubah menjadi bentuk logaritma dengan basis  $e$  sebagai berikut:

$$y = {}^2\log(2x^2 + x) = \frac{{}^e\log(2x^2 + x)}{{}^e\log 2} = \frac{\ln(2x^2 + x)}{\ln 2} \text{ maka misalkan}$$

$$y = \frac{1}{\ln 2} \ln u \text{ dan } u = 2x^2 + x \text{ diperoleh:}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d\left(\frac{1}{\ln 2} \ln u\right)}{du} \cdot \frac{d(2x^2 + x)}{dx} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \frac{d(\ln u)}{du} \cdot \frac{d(2x^2 + x)}{dx} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{u}\right) \cdot (4x + 1) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{2x^2 + x}\right) \cdot (4x + 1) \\ &= \frac{4x + 1}{(2x^2 + x) \ln 2} \end{aligned}$$

6. Diketahui  $y = \frac{\ln^2 4x}{x}$ , tentukan akar-akar persamaan  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x \frac{d(\ln^2 4x)}{dx} - \ln^2 4x \frac{d(x)}{dx}}{x^2} \\ &= \frac{x \left( (2 \ln 4x) \cdot \left(\frac{1}{4x}\right) \cdot (4) \right) - \ln^2 4x (1)}{x^2} \\ &= \frac{x \left( \frac{2}{x} \ln 4x \right) - \ln^2 4x}{x^2} \\ &= \frac{2 \ln 4x - \ln^2 4x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{Karena } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ maka } \frac{2 \ln 4x - \ln^2 4x}{x^2} = 0.$$

$$\frac{2 \ln 4x - \ln^2 4x}{x^2} = 0$$

$$2 \ln 4x - \ln^2 4x = 0$$

$$\ln 4x (2 - \ln 4x) = 0$$

$$\ln 4x = 0 \text{ atau } 2 - \ln 4x = 0$$

$$\ln 4x = \ln 1 \quad -\ln 4x = -2$$

$$4x = 1 \quad \ln 4x = 2$$

$$x = \frac{1}{4} \quad \ln 4x = \ln e^2$$

$$4x = e^2$$

$$x = \frac{1}{4} e^2$$

Jadi akar-akar persamaan  $\frac{dy}{dx} = 0$  adalah  $x = \frac{1}{4}$  dan  $x = \frac{1}{4} e^2$ .

7. Tentukan turunan dari fungsi  $f(x) = x^3 \cdot 3^x$ .

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} = 3^x \frac{d(x^3)}{dx} + x^3 \frac{d(3^x)}{dx} \\ &= 3^x (3x^2) + x^3 (3^x \ln 3) \\ &= 3^x (3x^2 + x^3 \ln 3) \\ &= 3^x x^2 (3 + x \ln 3) \end{aligned}$$

8. Tentukan turunan fungsi  $f(x) = x^x$ .

**Penyelesaian:**

Cara I:

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$d(\ln y) = [\ln x (d(x)) + x (d(\ln x))] dx$$

$$\frac{1}{y} dy = \left[ \ln x (1) + x \left( \frac{1}{x} \right) \right] dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x (\ln x + 1)$$

$$f'(x) = x^x (\ln x + 1)$$

Cara II:

Setiap bilangan  $a$  dapat ditulis sebagai  $a = e^{\ln a}$  (karena  $a = e^{\ln a}$  dapat diubah ke dalam bentuk logaritma dengan basis  $e$ ), sehingga diperoleh:

$$y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \text{ maka misalkan } y = e^u \text{ dan } u = x \ln x$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{d(e^u)}{du} \cdot \frac{d(x \ln x)}{dx} \\
&= (e^u \ln e) \cdot \left[ \ln x \cdot \frac{d(x)}{dx} + x \frac{d(\ln x)}{dx} \right] \\
&= (e^u \ln e) \cdot \left[ \ln x \cdot (1) + x \left( \frac{1}{x} \right) \right] \\
&= (e^u \cdot 1) \cdot (\ln x + 1) \\
&= e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1) \\
&= x^x (\ln x + 1)
\end{aligned}$$

### C. TURUNAN TINGKAT TINGGI

Jika  $f(x)$  persamaan suatu fungsi yang diferensiabel, maka derivatif pertama fungsi  $f$  dinyatakan dengan  $\frac{dy}{dx}$ ,  $y'$ , atau  $f'(x)$  yang pada umumnya juga merupakan sebuah fungsi  $f(x)$ . Jika derivatif pertama itu diferensiabel, maka derivatifnya disebut derivatif kedua dari fungsi  $f$ , dan dinyatakan dengan  $\frac{d^2y}{d^2x}$ ,  $y''$ , atau  $f''(x)$ . Selanjutnya derivatif dari derivatif kedua disebut derivatif ketiga dari fungsi  $f$ , dan dinyatakan dengan  $\frac{d^3y}{d^3x}$ ,  $y'''$ , atau  $f'''(x)$ . Derivatif ke- $n$  dinyatakan dengan  $\frac{d^ny}{d^ny}$ ,  $y^{(n)}$ , atau  $f^{(n)}(x)$ .

Derivatif tingkat tinggi digunakan pada banyak persoalan, misalnya dalam penyelidikan tentang nilai ekstrim suatu fungsi, titik belok suatu kurva, percepatan sebuah partikel yang bergerak, kelengkungan suatu kurva dan sebagainya yang akan dibahas pada bab berikutnya.

Perhatikan contoh-contoh berikut ini!

#### Contoh Soal

- Jika diketahui  $y = \cos \sqrt{x}$ , tentukan nilai  $4x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y$ .

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned}
y &= \cos \sqrt{x} \text{ maka } dy = d(\cos \sqrt{x}) \\
&= -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{\cos \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot 2\sqrt{x} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (-\sin \sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{-\cos \sqrt{x} + \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{4x} \\ &= \frac{-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x}}{4x\sqrt{x}} \\ 4x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y &= 4x \left[ \frac{-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x}}{4x\sqrt{x}} \right] + 2 \left[ -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right] + \cos \sqrt{x} \\ &= \left[ \frac{-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right] + \left[ -\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right] + \cos \sqrt{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi nilai dari  $4x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$ .

2. Jika diketahui  $f(x) = 2x - (4x^2 + 1) \arctan 2x$ , maka tentukan nilai dari  $f'''(0)$ .

**Penyelesaian:**

Dari fungsi  $f(x) = 2x - (4x^2 + 1) \arctan 2x$  diperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \left[ 8x \arctan 2x + \frac{2}{1+(2x)^2} (4x^2 + 1) \right] \\ &= 2 - \left[ 8x \arctan 2x + \frac{2}{1+4x^2} (4x^2 + 1) \right] \\ &= 2 - [8x \arctan 2x + 2] \\ &= -8x \arctan 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -8 \arctan 2x + \frac{2}{1+(2x)^2} (-8x) \\ &= -8 \arctan 2x - \frac{16x}{1+4x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -8 \frac{2}{1+4x^2} - \left[ \frac{16(1+4x^2) - 8x(16x)}{(1+4x^2)^2} \right] \\ &= -\frac{16}{1+4x^2} - \left[ \frac{16+64x^2-128x^2}{(1+4x^2)^2} \right] \\ &= -\frac{16(1+4x^2) - 16 + 64x^2}{(1+4x^2)^2} \\ &= \frac{-32}{(1+4x^2)^2} \end{aligned}$$

$$f'''(0) = \frac{-32}{(1+4(0)^2)^2} = -32$$

## D. RANGKUMAN

1. Aturan rantai didefinisikan yaitu Andaikan  $y = f(u)$  dan  $u = g(x)$  menentukan fungsi komposit  $y = f(g(x))$ . Jika  $g$  terdiferensialkan di  $x$  dan  $f$  terdiferensialkan di  $u = g(x)$ , maka  $f \circ g$  terdiferensialkan di  $x$  dan  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ .
2. Aturan rantai dalam notasi Leibniz mempunyai bentuk  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ .
3. Derivatif ke- $n$  dinyatakan dengan  $\frac{d^n y}{dx^n}$ ,  $y^{(n)}$ , atau  $f^{(n)}(x)$ .

## E. EVALUASI

Kerjakan soal berikut dengan tepat!!

6. Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut:

a.  $y = (x^2 + 4)^2(2x^3 - 1)^3$   
 $\ln^2(x^2)$

g.  $y =$

b.  $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$

h.  $y = \ln 2x - \arcsin x$

c.  $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

i.  $y = 2^x + \frac{1}{2}x^2$

d.  $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$

k.  $y = x^{2^x}$

e.  $y = \sin^3 2x$

l.  $y = x^3 e^{-x}$

f.  $y = \cos(4x^5 - 11x)$

m.  $y = x^{\arctan x}$

7. Tentukan persamaan garis singgung di titik  $P(1, 0)$  pada kurva  $y = x \ln(2x^2 - 1)$ .
8. Jika  $f(x) = x \sin x$ , tentukan  $f''(x)$ .
9. Jika  $f(x) = x^2 e^x$ , tunjukkan bahwa  $f^3(x) = e^x(x^2 + 6x + 6)$ .
10. Tunjukkan bahwa  $y = e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)$  memenuhi persamaan  $y'' + 4y' + 8y = 0$ .





ORIGINALITY REPORT

**21** %  
SIMILARITY INDEX

**21** %  
INTERNET SOURCES

**9** %  
PUBLICATIONS

**0** %  
STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	<a href="http://vaskoedo.wordpress.com">vaskoedo.wordpress.com</a> Internet Source	1 %
2	<a href="http://eprints.unm.ac.id">eprints.unm.ac.id</a> Internet Source	1 %
3	<a href="http://archive.org">archive.org</a> Internet Source	1 %
4	<a href="http://eprints.umm.ac.id">eprints.umm.ac.id</a> Internet Source	1 %
5	<a href="http://www.olgoopub.ir">www.olgoopub.ir</a> Internet Source	1 %
6	<a href="http://www.slideshare.net">www.slideshare.net</a> Internet Source	1 %
7	<a href="http://repository.usd.ac.id">repository.usd.ac.id</a> Internet Source	1 %
8	<a href="http://www.bsd.pendidikan.id">www.bsd.pendidikan.id</a> Internet Source	1 %
9	<a href="http://www.scribd.com">www.scribd.com</a> Internet Source	1 %
10	<a href="http://www.coursehero.com">www.coursehero.com</a> Internet Source	1 %
11	<a href="http://doku.pub">doku.pub</a> Internet Source	1 %
12	<a href="http://idoc.pub">idoc.pub</a> Internet Source	<1 %
13	<a href="http://florida.theorangegrove.org">florida.theorangegrove.org</a> Internet Source	<1 %

---

14	<a href="http://etheses.uin-malang.ac.id">etheses.uin-malang.ac.id</a> Internet Source	<1 %
15	<a href="http://www.ab-rafiee.com">www.ab-rafiee.com</a> Internet Source	<1 %
16	<a href="http://www.alvarezmathhelp.com">www.alvarezmathhelp.com</a> Internet Source	<1 %
17	<a href="http://adoc.pub">adoc.pub</a> Internet Source	<1 %
18	<a href="http://docplayer.net">docplayer.net</a> Internet Source	<1 %
19	<a href="http://engclubs.net">engclubs.net</a> Internet Source	<1 %
20	<a href="http://qdoc.tips">qdoc.tips</a> Internet Source	<1 %
21	<a href="http://brainmass.com">brainmass.com</a> Internet Source	<1 %
22	<a href="http://repository.unikom.ac.id">repository.unikom.ac.id</a> Internet Source	<1 %
23	<a href="http://pt.slideshare.net">pt.slideshare.net</a> Internet Source	<1 %
24	<a href="http://150.19.250.13">150.19.250.13</a> Internet Source	<1 %
25	<a href="http://reshimvse.com">reshimvse.com</a> Internet Source	<1 %
26	<a href="http://matessantboianes.wikispaces.com">matessantboianes.wikispaces.com</a> Internet Source	<1 %
27	<a href="http://dipmat.univpm.it">dipmat.univpm.it</a> Internet Source	<1 %
28	<a href="http://files1.simpkb.id">files1.simpkb.id</a> Internet Source	<1 %

---

[docplayer.hu](http://docplayer.hu)

29	Internet Source	<1 %
30	<a href="https://fr.scribd.com">fr.scribd.com</a> Internet Source	<1 %
31	<a href="https://followscience.com">followscience.com</a> Internet Source	<1 %
32	<a href="https://matematika-smk.net">matematika-smk.net</a> Internet Source	<1 %
33	<a href="https://zombiedoc.com">zombiedoc.com</a> Internet Source	<1 %
34	<a href="https://www.labmath.uqam.ca">www.labmath.uqam.ca</a> Internet Source	<1 %
35	<a href="https://www.vcharkarn.com">www.vcharkarn.com</a> Internet Source	<1 %
36	Marcelo Farias Caetano. "On stability and some remarks about positional systems", Universidade de Sao Paulo, Agencia USP de Gestao da Informacao Academica (AGUIA), 2018 Publication	<1 %
37	<a href="https://fredmath.net">fredmath.net</a> Internet Source	<1 %
38	<a href="https://www.grad.hr">www.grad.hr</a> Internet Source	<1 %
39	<a href="https://de.slideshare.net">de.slideshare.net</a> Internet Source	<1 %
40	<a href="https://faculty.mccneb.edu">faculty.mccneb.edu</a> Internet Source	<1 %
41	<a href="https://matematica1.com">matematica1.com</a> Internet Source	<1 %
42	<a href="https://pierre.warnault.free.fr">pierre.warnault.free.fr</a> Internet Source	<1 %

43	<a href="http://mafiadoc.com">mafiadoc.com</a> Internet Source	<1 %
44	<a href="http://starbase.jpl.nasa.gov">starbase.jpl.nasa.gov</a> Internet Source	<1 %
45	<a href="http://ratnasuryamardikaputra.blogspot.com">ratnasuryamardikaputra.blogspot.com</a> Internet Source	<1 %
46	<a href="http://pointgrey.vsb.bc.ca">pointgrey.vsb.bc.ca</a> Internet Source	<1 %
47	<a href="http://docplayer.ru">docplayer.ru</a> Internet Source	<1 %
48	<a href="http://makalah.alber.id">makalah.alber.id</a> Internet Source	<1 %
49	<a href="http://vd.litech.net">vd.litech.net</a> Internet Source	<1 %
50	Zak, Stanislaw H.. "Systems and Control", Oxford University Press Publication	<1 %
51	Fatriya Adamura, Vera Dewi Susanti. "Penalaran Matematis Mahasiswa dengan Kemampuan Berpikir Intuitif Sedang dalam Memecahkan Masalah Analisis Real", Jurnal Edukasi Matematika dan Sains, 2018 Publication	<1 %
52	<a href="http://dokumen.pub">dokumen.pub</a> Internet Source	<1 %
53	<a href="http://math.oulu.fi">math.oulu.fi</a> Internet Source	<1 %
54	<a href="http://www-prod.pen.k12.va.us">www-prod.pen.k12.va.us</a> Internet Source	<1 %
55	<a href="http://www.ictphysics.upol.cz">www.ictphysics.upol.cz</a> Internet Source	<1 %
56	<a href="http://radekf.net">radekf.net</a>	

Internet Source

<1 %

57

1pdf.net

Internet Source

<1 %

58

docplayer.info

Internet Source

<1 %

59

it.scribd.com

Internet Source

<1 %

60

www.math.ubc.ca

Internet Source

<1 %

61

www.nexoncn.com

Internet Source

<1 %

62

www.spoudi.gr

Internet Source

<1 %

63

abook.cn

Internet Source

<1 %

64

bilimakademisi.org

Internet Source

<1 %

65

manualzz.com

Internet Source

<1 %

66

Oakes, William C.. "Engineering Your Future",  
Oxford University Press

Publication

<1 %

67

docplayer.biz.tr

Internet Source

<1 %

68

documents.mx

Internet Source

<1 %

69

thealy.com

Internet Source

<1 %

70

O. Zahiri, R.A. Borzooei. "Topology on BL-  
algebras", Fuzzy Sets and Systems, 2016

Publication

<1 %

71	Ulrich L. Rohde, G. C. Jain, Ajay K. Poddar, A. K. Ghosh. "Introduction to Differential Calculus", Wiley, 2011 Publication	<1 %
72	Zhangyi He, Xiaoyang Dai, Mark Beaumont, Feng Yu. "Detecting and quantifying natural selection at two linked loci from time series data of allele frequencies with forward-in-time simulations", Cold Spring Harbor Laboratory, 2020 Publication	<1 %
73	<a href="http://rumahfilsafat.com">rumahfilsafat.com</a> Internet Source	<1 %
74	<a href="http://www.aoacademy.com">www.aoacademy.com</a> Internet Source	<1 %
75	<a href="http://www.oratori.brescia.it">www.oratori.brescia.it</a> Internet Source	<1 %
76	<a href="http://www.vif.com">www.vif.com</a> Internet Source	<1 %
77	Lathi, B.P.. "Modern Digital and Analog Communications Systems", Oxford University Press Publication	<1 %
78	<a href="http://nathanianajla.wordpress.com">nathanianajla.wordpress.com</a> Internet Source	<1 %
79	<a href="http://www.portanna.org">www.portanna.org</a> Internet Source	<1 %
80	<a href="http://www.rrringtones.com">www.rrringtones.com</a> Internet Source	<1 %
81	<a href="http://www.wakasato.org">www.wakasato.org</a> Internet Source	<1 %
82	Jerusa Mendonça Megale. "Problemas de sincronismo em uma família de campos"	<1 %

vetoriais", Universidade de Sao Paulo, Agencia  
USP de Gestao da Informacao Academica  
(AGUIA), 2020

Publication

83

Rogat, Axel. "Schnelle hoch genaue  
Einschließung von Werten arithmetischer  
Ausdrücke mit beliebiger vorgegebener  
Genauigkeit", Hochschulschriftenserver der  
Bergischen Universität Wuppertal, 2010.

Publication

<1 %

84

[adeleuw.nl](http://adeleuw.nl)

Internet Source

<1 %

85

[home.zcu.cz](http://home.zcu.cz)

Internet Source

<1 %

86

[library.univer.kharkov.ua](http://library.univer.kharkov.ua)

Internet Source

<1 %

87

[tankonyvtar.ttk.bme.hu](http://tankonyvtar.ttk.bme.hu)

Internet Source

<1 %

88

[www.math.ccsu.edu](http://www.math.ccsu.edu)

Internet Source

<1 %

89

[acid.it-kosongsatu.com](http://acid.it-kosongsatu.com)

Internet Source

<1 %

90

[docplayer.com.br](http://docplayer.com.br)

Internet Source

<1 %

91

[erikayulidasariputri.wordpress.com](http://erikayulidasariputri.wordpress.com)

Internet Source

<1 %

92

[examencommissie.be](http://examencommissie.be)

Internet Source

<1 %

93

[www.clipvidva.com](http://www.clipvidva.com)

Internet Source

<1 %

94

[www.wp.cc.nc.us](http://www.wp.cc.nc.us)

Internet Source

<1 %

95	<a href="http://www.xkaw.com">www.xkaw.com</a> Internet Source	<1 %
96	<a href="http://logica.uniroma3.it">logica.uniroma3.it</a> Internet Source	<1 %
97	<a href="http://matematohir.files.wordpress.com">matematohir.files.wordpress.com</a> Internet Source	<1 %
98	<a href="http://pakdosen.co.id">pakdosen.co.id</a> Internet Source	<1 %
99	<a href="http://pt.scribd.com">pt.scribd.com</a> Internet Source	<1 %
100	<a href="http://repozitorij.unios.hr">repozitorij.unios.hr</a> Internet Source	<1 %
101	<a href="http://vie.math.ac.vn">vie.math.ac.vn</a> Internet Source	<1 %
102	<a href="http://www.mathslideshow.com">www.mathslideshow.com</a> Internet Source	<1 %
103	Ana Maria Travaglini. "Integrability and geometry of quadratic differential systems with invariant hyperbolas", Universidade de Sao Paulo, Agencia USP de Gestao da Informacao Academica (AGUIA), 2021 Publication	<1 %
104	Bruce Olberding. "On the topology of valuation-theoretic representations of integrally closed domains", Journal of Pure and Applied Algebra, 2018 Publication	<1 %
105	Claudio Canuto, Anita Tabacco. "Analisi Matematica I", Springer Science and Business Media LLC, 2014 Publication	<1 %



---

Exclude quotes Off

Exclude matches Off

Exclude bibliography Off

GRADEMARK REPORT

FINAL GRADE

**/0**

GENERAL COMMENTS

**Instructor**

PAGE 1

PAGE 2

PAGE 3

PAGE 4

PAGE 5

PAGE 6

PAGE 7

PAGE 8

PAGE 9

PAGE 10

PAGE 11

PAGE 12

PAGE 13

PAGE 14

PAGE 15

PAGE 16

PAGE 17

PAGE 18

PAGE 19

PAGE 20

PAGE 21

PAGE 22

PAGE 23

PAGE 24

PAGE 25

PAGE 26

PAGE 27

PAGE 28

PAGE 29

---

PAGE 30

---

PAGE 31

---

PAGE 32

---

PAGE 33

---

PAGE 34

---

PAGE 35

---

PAGE 36

---

PAGE 37

---

PAGE 38

---

PAGE 39

---

PAGE 40

---

PAGE 41

---

PAGE 42

---

PAGE 43

---

PAGE 44

---

PAGE 45

---

PAGE 46

---

PAGE 47

---

PAGE 48

---

PAGE 49

---

PAGE 50

---

PAGE 51

---

PAGE 52

---

PAGE 53

---

PAGE 54

---

PAGE 55

---

PAGE 56

---

PAGE 57

---

PAGE 58

---

PAGE 59

---

PAGE 60

---

PAGE 61

---

PAGE 62

---

PAGE 63

---

PAGE 64

---

PAGE 65

---

PAGE 66

---

PAGE 67

---

PAGE 68

---

PAGE 69

---

PAGE 70

---

PAGE 71

---

PAGE 72

---

PAGE 73

---

PAGE 74

---

PAGE 75

---

PAGE 76

---

PAGE 77

---

PAGE 78

---

PAGE 79

---

PAGE 80

---

PAGE 81

---

PAGE 82

---

PAGE 83

---

PAGE 84

---

PAGE 85

---

PAGE 86

---

PAGE 87

---

PAGE 88

---

PAGE 89

---

PAGE 90

---

PAGE 91

---

PAGE 92

---

PAGE 93

---

PAGE 94

---

PAGE 95

---

PAGE 96

---

PAGE 97

---

PAGE 98

---

PAGE 99

---

PAGE 100

---

PAGE 101

---

PAGE 102

---

PAGE 103

---