Sari Saraswati, M.Pd.
Iesyah Rodliyah, S.Si., M.Pd.

KALKULUS DASAR

Pendekatan Blended Learning

ISBN : 978-623-6506-91-2

KALKULUS DASAR
Pendekatan Blended Learning

Buku ini merupakan bagian dari hasil pengembangan *blended learning* dalam mata kuliah kalkulus dasar sebagai inovasi pembelajaran abad 21.

Kegiatan pembelajaran dengan *blended learning* ini telah dikembangkan pada mata kuliah Kalkulus Dasar. Kegiatan belajar dalam mata kuliah ini terdiri dari 3 kegiatan belajar, yaitu kegiatan belajar 1, kegiatan belajar 2, dan kegiatan belajar 3. Bahan ajar dalam pembelajaran *online* yang dikembangkan pada masing-masing kegiatan belajar meliputi *handout* dan video pembelajaran yang diposting pada laman Edmodo. Sedangkan Lembar Kerja Kelompok serta *Power Point* diekmbangkan sebagai penunjang kegiatan tatap muka.

Sari Saraswati, M.Pd., adalah seorang Dosen di Universitas Hasyim Asy'ari Tebuireng. Sejak 2015, penulis mendedikasikan sebagai dosen pada Universitas Hasyim Asy'ari Tebuireng hingga saat ini. Penulis menekuni bidang *Realistics Mathematics Education* (RME) dan pendidikan matematika.

Iesyah Rodliyah, M. Pd., adalah seorang Dosen tetap pada Program Studi S1 Pendidikan Matematika di Universitas Hasyim Asy'ari sejak tahun 2014 sampai sekarang dan sebagai tenaga pengajar matematika dan Pembina olimpiade Sains dan Matematika tingkat SD dan SMP di beberapa sekolah swasta.

ISBN 978-623-6506-91-2

Penerbit : CV. AA. RIZKY
Alamat : Jl. Raya Ciruas Petir,
Puri Citra Blok B2 No. 34 Pipitan
Kec. Walantaka - Serang Banten
E-mail : aa.rizkypress@gmail.com
Website : www.aarizky.com

KALKULUS DASAR

Pendekatan *Blended Learning*

KALKULUS DASAR
Pendekatan *Blended Learning*

Sari Saraswati, M.Pd.
Iesyah Rodliyah, S.Si., M.Pd.

PENERBIT:
CV. AA. RIZKY
2020

KALKULUS DASAR

Pendekatan *Blended Learning*

Penulis:
Sari Saraswati, M.Pd.
Iesyah Rodliyah, S.Si., M.Pd.

Editor:
Khaerul Ikhwan

Desain Sampul dan Tata Letak:
Tim Kreasi CV. AA. RIZKY

Cetakan Pertama, November 2020

Penerbit:
CV. AA. RIZKY
Jl. Raya Ciruas Petir, Puri Citra Blok B2 No. 34
Kecamatan Walantaka, Kota Serang - Banten, 42183
Hp. 0819-06050622, Website : *www.aarizky.com*
E-mail: aa.rizkypress@gmail.com

Anggota IKAPI
No. 035/BANTEN/2019

ISBN : 978-623-6506-91-2
viii + 126 hlm, 23 cm x 15,5 cm

PRAKATA

Syukur Alhamdulillah, penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan berkat, rahmat, dan hidayah-Nya dan tak lupa sholawat serta salam tetap terlimpahkan kepada junjungan kita Rasulullah SAW, atas terselesainya buku dengan judul "Kalkulus Dasar: Pendekatan *Blended Learning*". Dengan terselesainya buku ini diharapkan dapat membantu para calon/tenaga pendidik khususnya para pembaca untuk menggunakan inovasi pembelajaran dengan pendekatan blended learning pada mata kuliah Kalkulus Dasar

Penulis menyadari bahwa terselesaikannya buku ini tidak terlepas dari bantuan semua pihak, untuk itu penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya khususnya kepada KEMENRISTEK DIKTI, Rektor Universitas Hasyim, LPPM Universitas Hasyim Asy'ari, Dekan Fakultas Ilmu Pendidikan, Kaprodi Pendidikan Matematika, dan Bapak Ibu dosen FIP yang memberikan kesempatan dan motivasi kepada penulis.

Akhir kata, Penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari kesempurnaan, untuk itu saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan demi penyempurnaan buku ini. Semoga buku ini bisa bermanfaat bagi kita semua khususnya para pembaca baik di dunia dan akhirat. Aamiiin Yaa Robbal 'Aalamiiin…

Jombang, November 2020

Penulis,

DAFTAR ISI

BAB 1
PENGANTAR *BLENDED LEARNING*

A. Pendahuluan

Pada bab pertama ini membahas tentang teori *blended learning*, apa itu *blended learning*, mengapa *blended learning* serta bagaimana penerapannya di kelas.

Tujuan merancang pembelajaran salah satunya adalah untuk memperbaiki serta meningkatkan kualitas dari suatu pembelajaran (Dwiyogo, 2018). Salah satu upaya yang dapat dilakukan adalah dengan melakukna variasi model pembelajaran, media serta bahan ajar yang baik.

Buku ini merupakan bagian dari hasil pengembangan *blended learning* dalam mata kuliah kalkulus dasar sebagai inovasi pembelajaran abad 21. Agar dapat menerapkannya dalam kelas, maka perhatikan penjelasan berikut.

B. Pengertian *Blended Learning*

Istilah *blended learning* pada mulanya muncul dari penggabungan pembelajaran tatap muka dan *online*. Saat ini banyak istilah *blended learning* semakin popular, terutama dengan adanya kondisi pandemic covid-19 yang berpengaruh sangat signifikan terhadap pendidikan baik di sekolah maupun perguruan tinggi.

Menurut Graham (2004) terdapat tiga istilah yang sering digunakan dalam menyebutkan definisi *Blended Learning*, yaitu: 1) Kombinasi antara strategi pembelajaran (*combining instructional modalities or delivery media*), 2) Kombinasi antara metode pembelajaran (*combining instructional methods*), dan 3) Kombinasi antara *online learning* dengan pembelajaran tatap muka (*combining online and face-to-face instruction*).

Gambar 1.1. Pendekatan *Blended Learning*

Pelaksanaan *blended learning* memungkinkan penggunaan sumber belajar *online*, tanpa meninggalkan kegiatan tatap muka (Elliot, 2002:58). Adapun teknisnya dapat disajikan sebagai berikut:

1. *Online Learning* atau E-*learning*

   Beradasarkan Waryanto (2006) memaparkan istilah *online learning*, e-*learning*, *internet-enabled learning*, *virtual learning* atau *web based learning* sebagai suatau pengembangan dari pembelajaran jarak jauh yang menggunakan internet. Pembelajaran *online* adalah bagian dari kegiatan pembelajaran yang memanfaatkan jaringan (internet, LAN, WAN) sebagai metode penyampaian, interaksi dan fasilitasi serta didukung oleh berbagai bentuk layanan belajar lainnya (Waryanto, 2006).

2. *Pembelajaran* Tatap muka (*Face-to-face Learning*)

   Pembelajaran tatap muka merupakan pembelajaran yang melibatkan interaksi langsung antara pendidik dan peserta didik atau mahasiswa (Husamah, 2014). Dalam *blended learning*, pembelajaran tatap muka digunakan untuk melengkapi pembelajaran *online* dengan metode ceramah, tanya jawab, diskusi, dan penugasan.

3. Belajar Mandiri (*Individualizad Learning*)

   Menurut Istiningsih & Hasbullah (2015) memaparkan bahwa belajar mandiri dalam *blended learning* adalah peserta didik atau mahasiswa dapat belajar mendiri di dalam kelas atau diluar kelas dengan cara mengakses informasi atau materi pembelajaran *online* via internet.

C. Implementasi *Blended Learning*

Implementasi *blended learning* pada bab ini merupakan gabungan pembelajaran tatap muka dan pembelajaran *online*. Dalam mendukung pembelajaran *online*, maka digunakan salah satu *platform* yang tersedia secara bebas dan gratis yaitu Edmodo.

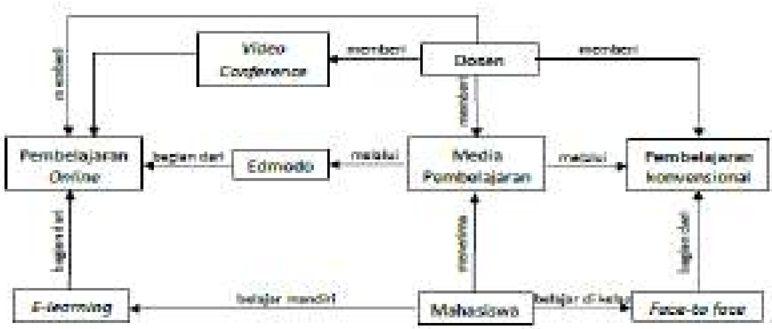
Kegiatan pembelajaran dengan *blended learning* ini telah dikembangkan pada mata kuliah Kalkulus Dasar. Kegiatan belajar dalam mata kuliah ini terdiri dari 3 kegiatan belajar, yaitu kegiatan belajar 1, kegiatan belajar 2, dan kegiatan belajar 3.

Pada kegiatan belajar pertama, mahasiswa diharapkan dapat menguasai materi tentang konsep dasar turunan, diferensial serta aproksimasi, kegiatan belajar 2 bertujuan untuk memahami dan menggukan aturan pencarian turunan, serta kegiatan belajar 2 dikembangkan dengan tujuan agar mahasiswa menggunakan aturan rantai dan turunan tingkat tinggi dalam menyelesaikan permasalahan turunan yang kompleks.

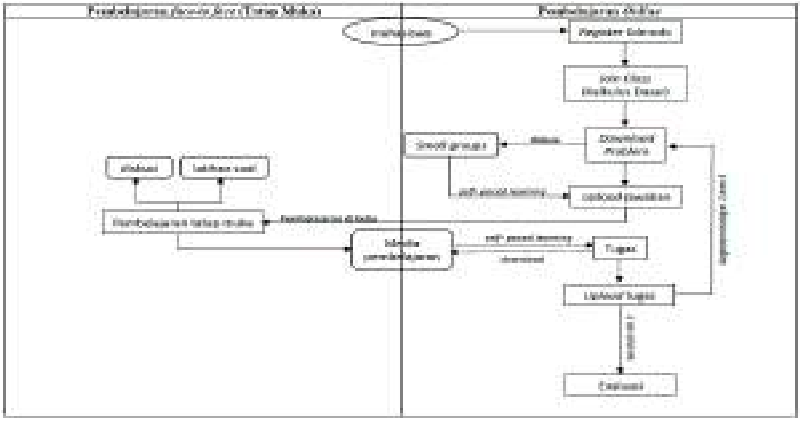
Bahan ajar dalam pembelajaran *online* yang dikembangkan pada masing-masing kegiatan belajar meliputi *handout* dan video pembelajaran yang diposting pada laman Edmodo. Sedangkan Lembar Kerja Kelompok serta *Power Point* diekmbangkan sebagai penunjang kegiatan tatap muka.

Pada awal setiap kegiatan belajar , mahasiswa diberikan soal *open ended* dengan tujuan untuk menggiring mahasiswa menuju topik materi yang akan dibahas pada tatap muka. Setelah mengikuti pembelajaran tatap muka, mahasiswa dapat mengakses materi ajar serta latihan soal melalui Edmodo.

Adapun siklus penerapan *blended learning* disajikan pada gambar berikut.



Gambar 1.2 Konsep *Blended Learning*



Gambar 1.3 Alur *Blended Learning* Berbasis Edmodo

BAB 2
PENDAHULUAN KALKULUS

A. Pendahuluan

Bab ini membahas pengenalan tentang mata kuliah kalkulus dasar. Pada bab ini dijabarkan beberapa materi prasyarat sebelum mempelajari kalkulus dasar.

Materi pada bab ini sangat bermanfaat bagi mahasiswa pendidikan matematika sebagai calon pendidik. Mahasiswa diharapkan mampu memahami struktur bilangan real beserta sifat-sifatnya, pertidaksamaan, dan nilai mutlak.

Tujuan mempelajari bab ini adalah supaya mahasiswa dapat memahami materi prasyarat dalam mempelajari materi kalkulus terturama turunan, dan mahasiwa mampu mengaplikasikan dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kalkulus terutama turunan.

Materi dalam bab ini disusun sedemikian rupa agar mudah dipahami oleh mahasiswa. Kalian harus mulai mempelajari bab ini terlebih dahulu agar dapat memahami bab-bab berikutnya dengan baik. Pelajarilah definisi, teorema, serta kerakan latihan soalnya agar kalian dapat lebih terampil.

B. Sistem Bilangan Real

Himpunan bilangan real mempunyai peranan yang sangat penting dalam kalkulus, karena kalkulus didasarkan pada sistem bilangan real dan sifat-sifatnya.

Kita telah mengenal himpunan-himpunan bilangan berikut ini :

1. Himpunan bilangan asli $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

2. Himpunan bilangan cacah $C = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
3. Himpunan bilangan bulat $B = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
4. Himpunan bilangan rasional Q, yaitu suatu himpunan yang anggota-anggotanya dapat ditulis sebagai p / q, dengan p dan q bilangan bulat dan $q \neq 0$.

   Misalnya : $2 / 3, (-7) / 4, 2, 6 / 3, 8\frac{1}{2}, -10$

   Jika p habis dibagi q, maka bilangan rasional adalah bilangan bulat. Misalnya : $6 / 3, -5, 0, (-18) / 9$

   Jika p tidak habis dibagi q, maka bilangan rasional adalah bilangan pecahan. Misalnya : $13 / 5, (-4) / 7, 6\frac{1}{4}$
5. Himpunan bilangan irasional I, yaitu suatu himpunan yang anggota-anggotanya tidak dapat ditulis sebagai p / q, dengan p dan q bilangan bulat dan $q \neq 0$.

   Misalnya : $\sqrt{2}, log\, 3, \pi$

Gabungan dari himpunan bilangan rasional Q dan himpunan bilangan irasional I disebut himpunan bilangan real R.

Sistem bilangan real yang terdiri dari himpunan bilangan real R dan dua operasi penambahan dan perkalian, memenuhi sifat-sifat berikut ini.

Misalkan a, b, dan c anggota himpunan bilangan real R.

1. Sifat tertutup

   $a + b$ dan ab adalah bilangan real yang tunggal.
2. Sifat komutatif

   $a + b = b + a$ dan $ab = ba$.
3. Sifat asosiatif

   $a + (b + c) = (a + b) + c$ dan $a(bc) = (ab)c$.

4. Sifat ditributif

   $a(b + c) = ab + ac$.

5. Elemen identitas

   Terdapat dua bilangan real 0 dan 1, sehingga untuk setiap $a + 0 = a$ dan $a \cdot 1 = a$.

6. Invers aditif

   Untuk setiap bilangan a terdapat suatu bilangan $-a$ yang disebut negatif a, sehingga $a + (-a) = 0$.

7. Invers perkalian

   Untuk setiap bilangan $a \neq 0$ terdapat suatu bilangan $1 / a$ yang disebut kebalikan a, sehingga $a \cdot 1/a = 1$.

Operasi pengurangan dapat dikembalikan pada operasi penjumlahan, yaitu $a - b = a + (-b)$.

Operasi pembagian dapat dikembalikan pada operasi perkalian, yaitu $a / b = a \cdot 1 / b$ $(b \neq 0)$.

C. Pertidaksamaan

Salah satu konsep yang sangat penting dalam kalkulus ialah konsep tentang limit. Konsep inilah yang membedakan kalkulus dari semua cabang matematika yang telah ada sebelumnya. Dalam definisi-definisi tentang limit yang akan kita bicarakan kemudian, seringkali timbul bentuk-bentuk pertidaksamaan seperti $|x - 2| < 0{,}001$. Karena itu dalam subtopik ini akan kita bahas cara menyelesaikan suatu pertidaksamaan.

Beberapa sifat yang perlu kita fahami adalah sebagai berikut.

Misalkan a, b, c, d anggota himpunan bilangan real R.

1. Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$

2. $a < b$ bila dan hanya bila $a + c < b + c$
3. Jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$
4. Jika $c > 0$, maka $a < b$ bila dan hanya bila $ac < bc$
5. Jika $c < 0$, maka $a < b$ bila dan hanya bila $ac > bc$
6. Jika a dan b bertanda sama, maka $a < b$ bila dan hanya bila ${}^{1}/_{a} > {}^{1}/_{b}$
7. Jika $a > 0, b > 0$, maka $a < b$ bila dan hanya bila $a^2 < b^2$
8. Jika $a < 0, b < 0$, maka $a < b$ bila dan hanya bila $a^2 > b^2$

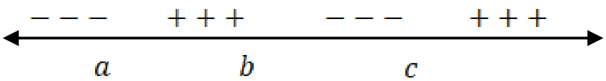
Selanjutnya kita definisikan beberapa pengertian tentang selang atau interval, sebagai berikut :

1. Selang terbuka (a, b) adalah himpunan bilangan real x yang memenuhi $a < x < b$
2. Selang tertutup $[a, b]$ adalah himpunan bilangan real x yang memenuhi $a \leq x \leq b$
3. Selang setengah terbuka sebelah kanan (setengah tertutup sebelah kiri) $[a, b)$ adalah himpunan bilangan real x yang memenuhi $a \leq x < b$
4. Selang tak hingga tertutup sebelah kanan $(-\infty, a]$ adalah himpunan bilangan real x yang memenuhi $x \leq a$

Suatu sifat penting dalam sistem bilangan real ialah bahwa setiap bilangan real dapat digambarkan betanya sebagai suatu titik pada suatu garis lurus yang disebut garis bilangan. Sebaliknya setiap titik pada garis bilangan adalah peta suatu bilangan real tertentu. Dikatakan terdapat korespondensi satu-satu antara anggota himpunan bilangan real dengan titik-titik pada garis bilangan.

Untuk menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan berbentuk $(x-a)(x-b)(x-c) < 0$ dengan $a < b < c$, kita tentukan lebih dulu nilai-nilai nol ruas kiri, yaitu $x = a, x = b$, dan $x = c$.

Kemudian kita gambar peta dari nilai-nilai nol itu pada suatu garis bilangan. Perhatikan bahwa $(x-a)(x-b)(x-c)$ berganti tanda dalam selang-selang berturutan yang dibatasi oleh nilai-nilai nolnya.



Gambar 2.1. Menentukan daerah positif/negatif

Lihat gambar 2.1, andaikan $(x-a)(x-b)(x-c)$ dalam selang (a, b) bertanda positif, maka dalam selang (b, c) bentuk itu bertanda negatif, dalam selang (c, ∞) bertanda positif, dan dalam selang $(-\infty, a)$ bertanda negatif. Himpunan penyelesaiannya ialah $\{x \mid x < a$ atau $b < x < c\}$.

Contoh

1. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 + x - 2 < 0$, jika x perubah pada himpunan bilangan real R!

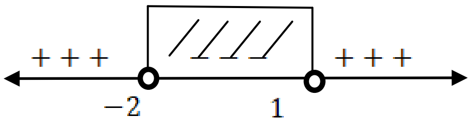
   Penyelesaian :

   $x^2 + x - 2 < 0$

   $(x+2)(x-1) < 0$

   $x = -2$ atau $x = 1$

   Gambarlah peta nilai-nilai nol itu pada suatu garis bilangan. Lihat gambar 2.2.



Gambar 2.2. Daerah positif/negatif dari $x^2 + x - 2 < 0$

Jadi himpunan penyelesaian dari $x^2 + x - 2 < 0$ adalah $\{x| - 2 < x < 1 <, x \in R\}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian $\frac{(2x-1)}{(x-4)} < 3$, jika x perubah pada himpunan bilangan real R!

Penyelesaian :

Syarat adanya penyelesaian : $x \neq 4$, karena penyebut tidak boleh 0, maka diperoleh penyelesaian dengan langkah-langkah berikut:

Langkah 1: Ruas kanan dijadikan nol, jadi

$$\frac{2x-1}{x-4} - 3 < 0$$

Langkah 2: Ruas kiri difaktorkan

$$\frac{2x-1-(3(x-4))}{x-4} < 0$$

$$\frac{2x-1-3x+12}{x-4} < 0$$

$$\frac{-x+11}{x-4} < 0$$

Langkah 3: Menentukan nilai-nilai nol ruas kiri, yaitu

- Pembilang

  $-x + 11 = 0$

  $-x = -11$

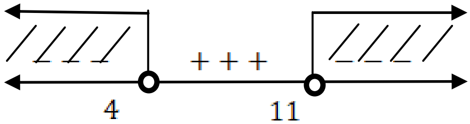
  $x = 11$

- Penyebut

  $x - 4 = 0$

  $x = 4$

Langkah 4: Menggambar peta nilai-nilai nol pada suatu garis bilangan.



Gambar 2.3. Daerah positif/negatif dari $\frac{(2x-1)}{(x-4)} < 3$

Langkah 5: Himpunan Penyelesaian $\{x|x < 4, x > 11, x \in R\}$.

3. Tentukan himpunan penyelesaian $\sqrt{x+4} > \sqrt{2x+10}$, jika x perubah pada himpunan bilangan real R!

Penyelesaian :

Langkah 1: Kedua ruas dipangkatkan dua agar akarnya hilang

$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2 > \left(\sqrt{2x+10}\right)^2$$
$$x+4 \quad > \quad 2x+10$$

Langkah 2: Menentukan nilai-nilai nol ruas kiri

$$x+4 \quad > \quad 2x+10$$
$$-x \quad > \quad 6$$
$$x \quad < \quad -6$$

Syarat:

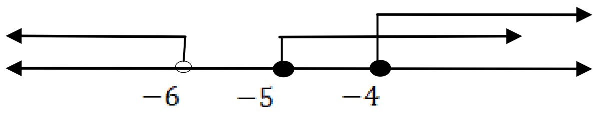
- $x + 4 \geq 0$

  $x \geq -4$
- $2x + 10 \geq 0$

  $2x \geq -10$

  $x \geq -5$

Langkah 3: Menggambar peta nilai-nilai nol pada suatu garis bilangan.



Gambar 2.4. Daerah penyelesaian $\sqrt{x+4} > \sqrt{2x+10}$

Langkah 4: Karena ketiga daerah itu tidak beririsan maka himpunan Penyelesaian {}

4. Tentukan himpunan penyelesaian $-3 < \frac{2}{x-2} < -1$, jika x perubah himpunan bilangan real R!

Penyelesaian :

Syarat adanya penyelesaian adalah $x \neq 2$.

Soal ini kita selesaikan dengan memperhatikan sifat-sifat pertidaksamaan. Kita tidak boleh mengalikan ketiga ruas pertidaksamaan itu dengan $x - 2$, karena kita tidak mengetahui tandanya. Untuk itu kita bedakan dua hal, yaitu $x - 2 > 0$ dan $x - 2 < 0$.

a. Jika $x - 2 > 0$, maka $x > 2$. Kita peroleh

$$-3(x-2) < 2 < -1(x-2)$$

$\Leftrightarrow$ $-3x + 6 < 2$ dan $2 < -x + 2$

$\Leftrightarrow$ $-3x < -4$ dan $x < 0$

$\Leftrightarrow$ $3x > 4$ dan $x < 0$

$\Leftrightarrow$ $x > \frac{4}{3}$ dan $x < 0$

Ternyata tidak ada nilai x yang memenuhi

b. Jika $x - 2 < 0$, maka $x < 2$. Kita peroleh

$$-3(x-2) > 2 > -1(x-2)$$

$\Leftrightarrow$ $-3x + 6 > 2$ dan $2 > -x + 2$

$\Leftrightarrow$ $-3x > -4$ dan $x > 0$

$\Leftrightarrow \quad 3x < 4$ dan $x > 0$

$\Leftrightarrow \quad x < \frac{4}{3}$ dan $x > 0$

Karena $x < 2$, maka himpunan penyelesaiannya $0 < x < \frac{4}{3}$

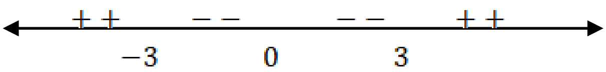
5. Tentukan himpunan penyelesaian $x^4 - 9x^2 < 0$, jika x perubah pada himpunan bilangan real R!

   Penyelesaian :

   $x^2(x+3)(x-3) < 0$

   Nilai-nilai nol ruas kiri adalah $-0, 0, -3$, dan 3

   Lihat gambar 2.5.



Gambar 2.5 Daerah Positif/Negative dari $x^4 - 9x^2 < 0$

Karena ada dua nilai nol yang sama (berimpit) pada $x = 0$, maka ruas kiri tidak berganti tanda dalam dua selang berurutan yang dibatasi oleh $x = 0$. Untuk $x = 1$ ruas kiri bernilai $-8 < 0$. Jadi, himpunan penyelesaian $\{x| -3 < x < 3, x \neq 0\}$.

D. Nilai Mutlak

Dalam kalkulus seringkali kita jumpai bentuk persamaan atau pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak atau bilangan real. Misalnya

$|x-4| < d, |2x-5| > |x+4|, y = x^2 - 2|x| - 3, |sin\, x| \leq 1$

Dalam subtopik ini kita bahas konsep nilai mutlak suatu bilangan dan ketrampilan dalam menggunakan konsep tersebut.

Nilai mutlak suatu bilangan real x yang ditulis sebagai $|x|$ didefinisikan

$|x| = x$ jika $x \geq 0$,

$|x| = -x$ jika $x < 0$.

Jadi untuk menentukan nilai mutlak suatu bilangan, kita harus mengetahui tanda bilangan itu. Misalnya

1. $|3\pi - 1| = 3\pi - 1$, karena $3\pi - 1$ positif
2. $|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$, karena $1 - \sqrt{3} < 0$
3. $|-1 - \sqrt{3}| = -(-1 - \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}$, karena $-1 - \sqrt{3} < 0$
4. $|2 - log\, 4| = 2 - log\, 4$, karena $2 - log\, 4 > 0$

Jika $x \geq 0$, maka kita asumsikan $\sqrt{x}$ adalah suatu bilangan tidak negatif yang kuadratnya sama dengan x. Hal ini mengakibatkan bahwa untuk setiap bilangan real x berlaku

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ dan } |x|^2 = x^2.$$

Misalnya : $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$, $|1 - 3\pi|^2 = (1 - 3\pi)^2$

Beberapa sifat tentang nilai mutlak dapat kita jumpai dalam teorema-teorema berikut ini.

1. Jika a dan b bilangan real, maka $|a| \cdot |b| = |ab|$
2. Jika a dan b bilangan real, maka $\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$
3. Jika $a > 0$, maka $|x| < a$ bila dan hanya bila $-a < x < a$
4. Jika $a > 0$, maka $|x| > a$ bila dan hanya bila $x > a$ atau $x < -a$
5. Jika a dan b bilangan real, maka $|a + b| \leq |a| + |b|$
6. Jika a dan b bilangan real, maka $|a - b| \geq |a| - |b|$

Teorema-teorema di atas dengan mudah dapat dibuktikan.

1. $|a| \cdot |b| = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{(ab)^2} = |ab|$

2. Jika $b \neq 0$, maka $|b| \cdot \frac{|a|}{|b|} = \left|b \cdot \frac{a}{b}\right|$

$$|b| \cdot \frac{|a|}{|b|} = |a|$$

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

Pembuktian lain.

Misalkan, $\frac{a}{b} = c$

$$a = bc$$

$$|a| = |bc|$$

$$|a| = |b||c|$$

$$\frac{|a|}{|b|} = |c|$$

$$\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$$

3. $|x| < a \Leftrightarrow |a|^2 < a^2$

$\Leftrightarrow x^2 < a^2$

$\Leftrightarrow (x + a)(x - a) < 0$

$\Leftrightarrow -a < x < a$

4. $|x| > a \Leftrightarrow |a|^2 > a^2$

$\Leftrightarrow x^2 > a^2$

$\Leftrightarrow (x + a)(x - a) > 0$

$\Leftrightarrow x > a$ atau $x < -a$

5. Untuk setiap bilangan real a dan b berlaku

$-|a| \leq a \leq |a|$ dan $-|b| \leq b \leq |b|$, sehingga

$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$ atau

$|a + b| \leq |a| + |b|$

6. Menurut ketaksamaan segitiga,

$$|a - b| + |b| \geq |(a - b) + b|$$

$$\Leftrightarrow \quad |a - b| + |b| \geq |a - b + b|$$

$\Leftrightarrow \qquad |a-b|+|b| \geq |a|$

$\Leftrightarrow \qquad |a-b| \geq |a|-|b|$

Perhatikan contoh-contoh berikut ini.

Contoh

1. Tentukan himpunan penyelesaian $|2x-1|<5$, jika x perubah pada himpunan bilangan real R!

   Penyelesaian :

   $|2x-1|<5$

   $\Leftrightarrow \quad -5<2x-1<5$

   $\Leftrightarrow \quad -5<2x-1$ dan $2x-1<5$

   $\Leftrightarrow \quad -2x<4$ dan $2x<6$

   $\Leftrightarrow \quad x>-2$ dan $x<3$

   Himpunan penyelesaian $\{x|-2<x<3\}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $x^2-|x|-2=0$, jika x perubah pada himpunan bilangan real R!

   Penyelesaian :

   Kita bedakan dua hal, yaitu $x \geq 0$ dan $x<0$.

   a. Untuk $x \geq 0$, maka $\qquad |x|=x$

   $$x^2-x-2=0$$
   $$(x-2)(x+1)=0$$
   $$x=2 \text{ atau } x=-1$$

   karena $x \geq 0$ maka $x=2$

   b. Untuk $x<0$, maka $\qquad |x|=-x$

   $$x^2+x-2=0$$
   $$(x+2)(x-1)=0$$
   $$x=-2 \text{ atau } x=1$$

karena $x < 0$ maka $x = -2$

Cara lain

$x^2 - |x| - 2 = 0$

Karena $x^2 = |x|^2$, maka:

$|x|^2 - |x| -= 0$

Misalkan, $y = |x| \geq 0$, maka kita peroleh

$y^2 - y - 2 = 0$

$(y - 2)(y + 1) = 0$

$y = 2$ atau $y = -1$

Karena $y = |x| \geq 0$, maka $y = |x| = 2$, sehingga $x = 2$ atau $x = -2$. Jadi, himpunan penyelesaiannya $\{-2,2\}$.

3. Tentukan himpunan penyelesaian $|x^2 - 5x + 6| > x^2 - 5x + 6$, jika x perubah pada himpunan bilangan real R!

   Penyelesaian :

   Karena pertidaksamaan $|y| > y$ dipenuhi jika $y < 0$, maka pertidaksamaan yang diketahui dipenuhi oleh nilai-nilai x yang menyebabkan

   $x^2 - 5x + 6 < 0$, atau $(x - 2)(x - 3) < 0$, jadi $2 < x < 3$.

   Himpunan penyelesaiannya $\{2 < x < 3\}$

E. Rangkuman

1. Bilangan real merupakan bilangan yang terdiri dari bilangan rasional dan irasional. Bilangan real dilambangkan dengan R. Adapun sifat-sifat dari bilangan real sebagai berikut:
2. Sifat-sifat bilangan real pada operasi penjulmahan dan perkalian meliputi bersifat; tertutup, komutatif, asosiatif,

distributif, terdapat elemen identitas, mempunyai Invers aditif dan Invers perkalian.

3. Pertidaksamaan merupakan suatu kalimat/pernyataan matematika yang memuat satu atau lebih perubah dan terdapat tanda ketaksamaan yaitu $<, >, \leq$, atau $\geq$. Adapun sifat-sifat dari pertidaksamaan sebagai berikut:
   a. Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$
   b. $a < b$ bila dan hanya bila $a + c < b + c$
   c. Jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$
   d. Jika $c > 0$, maka $a < b$ bila dan hanya bila $ac < bc$
   e. Jika $c < 0$, maka $a < b$ bila dan hanya bila $ac > bc$
   f. Jika a dan b bertanda sama, maka $a < b$ bila dan hanya bila ${}^1\!/_a > {}^1\!/_b$
   g. Jika $a > 0, b > 0$, maka $a < b$ bila dan hanya bila $a^2 < b^2$
   h. Jika $a < 0, b < 0$, maka $a < b$ bila dan hanya bila $a^2 > b^2$

4. Nilai mutlak suatu bilangan real x yang ditulis $|x|$, didefinisikan sebagai berikut:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

5. Beberpa sifat nilai mutlak dapat ditemukan dalam teorema-teorema berikut ini:
   a. Jika a dan b bilangan real, maka $|a| \cdot |b| = |ab|$
   b. Jika a dan b bilangan real, maka $\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
   c. Jika $a > 0$, maka $|x| < a$ bila dan hanya bila $-a < x < a$

d. Jika $a > 0$, maka $|x| > a$ bila dan hanya bila $x > a$ atau $x < -a$
e. Jika a dan b bilangan real, maka $|a + b| \leq |a| + |b|$
f. Jika a dan b bilangan real, maka $|a - b| \geq |a| - |b|$

F. Evaluasi

Kerjakan soal evaluasi berikut ini supaya menambah pemahaman kalian tentang bab ini.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut.

1. $x^2 - 3x + 2 > 0$
2. $\frac{3}{2x-4} < 1$
3. $\sqrt{2 - 3x} > \sqrt{4x + 5}$
4. $-2 < \frac{5}{2x-5} < -1$
5. $x^4 - x^2 < 0$

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak berikut.

1. $-4|4x - 4| = 64$
2. $|7x| = 7 - x$
3. $\left|\frac{2}{3x-1}\right| > 1$
4. $|x^2 - 2x - 1| \leq 2$
5. $4|x - 2| + 12 > |x - 2|^2$

BAB 3
FUNGSI

A. Pendahuluan

Masih ingkatkan kalian tentang konsep dasar fungsi?. Pada bab ini akan dibahas tentang konsep fungsi yang pernah kalian pelajari pada jenjang pendidikan sebelumnya. Materi fungsi menjadi salah satu materi dasar dalam mempelajari kalkulus. Di dalam kalkulus, materi tentang fungsi banyak dijumpai seperti pada bab limit dan turunan yang akan dibahas pada bab berikutnya. Oleh karena itu, tujuan pembelajaran pada bab ini antara lain:

1. Mahasiswa mampu menjelaskan perbedaan fungsi dan relasi.
2. Mahasiswa mampu menentukan domain dan range dari berbagai bentuk fungsi.
3. Mahasiswa dapat menjelaskan macam-macam fungsi.
4. Mahasiswa dapat menggambar grafik dari berbagai macam fungsi.
5. Mahasiswa dapat menentukan invers fungsi.

B. Definisi Fungsi, Domain, Dan Range

Fungsi merupakan salah satu konsep yang sangat penting dalam matematika. Fungsi didefinisikan sebagai suatu relasi khusus. Apakah perbedaan relasi dan fungsi?. Untuk lebih jelasnya, maka dalam subtopik ini terlebih dulu akan kita bahas pengertian relasi.

Perhatikan dua himpunan $A = \{p, q, r\}$ dan $B = \{1,2\}$. Jika kita definisikan dua himpunan tersebut dalam perkalian cartesius himpunan A dan himpunan B sebagai $A \times B\{(x, y) \setminus x$ anggota A, y anggota $B\}$.

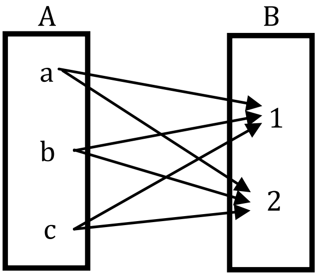
$$A \times B = \{(p, 1), (p, 2), (q, 1), (q, 2), (r, 1), (r, 2)\}$$

$$B \times A = \{(1, p), (1, q), (1, r), (2, p), (2, q), (2, r)\}$$

Perhatikan bahwa himpunan pasangan berurutan dari perkalian $A \times B \neq B \times A$, maka dapat disimpulkan bahwa perkalian cartesius dua himpunan tidak komutatif.

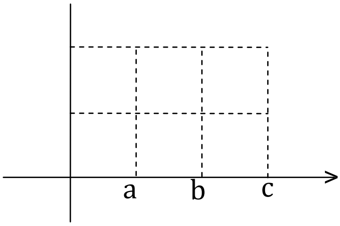
Relasi A dengan B dapat disajikan dengan beberapa cara, yaitu sebagai:

1. Diagram panah dari himpunan A ke himpunan B, seperti tampak pada **Gambar 3.1** berikut.



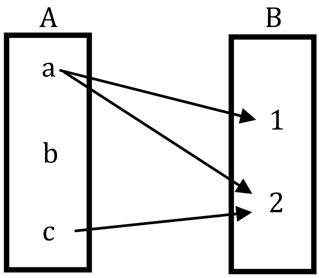
Gambar 3.1 Diagram Panah

2. Himpunan pasangan berurutan dimana elemen pertama adalah anggota himpunan A dan elemen kedua merupakan anggota himpunan B.
3. Himpunan titik pada bidang koordinat, seperti pada **Gambar 3.2.**



Gambar 3.2. Pasangan titik pada bidang koordinat

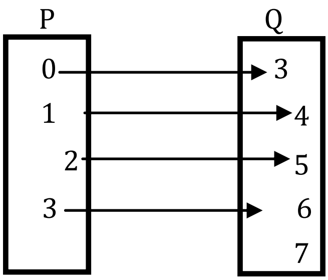
Misalkan terdapat himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1,2\}$. Terdapat suatu relasi yang menyatakan $\{(a, 1), (a, 2), (c, 2)\}$. Untuk bisa memahami apa yang dimaksud dengan relasi, maka perhatikan **Gambar 3.3** berikut.



Gambar 3.3 Relasi A ke B

Berdasarkan **Gambar 3.3** terlihat bahwa relasi ini merupakan himpunan bagian dari $A \times B$. Secara umum dapat dikatakan bahwa suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah himpunan bagian dari perkalian cartesius himpunan A dan himpunan B. Relasi merupakan aturan yang memasangkan anggota himpunan A ke himpunan B.

Perhatikan sekarang apabila diberikan dua himpunan $P = \{0,1,2,3\}$ dan $Q = \{3,4,5,6,7\}$. Kita dapat mengadakan suatu relasi R dari himpunan P ke himpunan Q, sehingga anggota sebarang x dalam himpunan P dikawankan dengan anggota $x + 3$ dalam himpunan Q. Hal ini dapat dinyatakan sebagai $R: x \rightarrow x + 3$. Perhatikan **Gambar 3.4** berikut.



Gambar 3.4. Relasi P ke Q

Berdasarkan relasi R dikatakan bahwa anggota Q yaitu $3, 4, 5,6$ berturut-turut merupakan **peta** atau **bayangan** dari anggota himpunan P. Apabila relasi dari P ke Q kita nyatakan dalam himpunan pasangan terurut, maka diperoleh $R = \{(0,3), (1,4), (2,5), (3,6)\}$. Relasi R ini adalah relasi yang khusus, sebab setiap anggota himpunan P dikawankan dengan tepat satu anggota himpunan Q. Relasi seperti ini disebut suatu fungsi atau pemetaan dari himpunan P ke himpunan Q.

Jadi suatu relasi R dari himpunan P ke himpunan Q disebut sebagai suatu fungsi atau pemetaan, jika setiap anggota himpunan P dikawankan dengan tepat satu anggota himpunan Q. Oleh karena itu, apabila terdapat suatu relasi yang tidak semua anggotanya mempunyai kawan atau apabila kawannya tidak tepat satu, maka relasi tersebut tidak dapat dikatakan sebagai suatu fungsi.

Misalkan relasi R yang merupakan suatu fungsi pada contoh di atas kita nyatakan sebagai fungsi f, maka fungsi tersebut dapat dituliskan dalam $f : x \rightarrow x + 3$. Jika x anggota himpunan P, maka hasil pemetaan x oleh fungsi f

ditulis sebagai $f(x)$. Karena fungsi f memetakan x ke $x + 3$, maka dapat ditulis $f(x) = x + 3$, yang berarti bahwa $x + 3$ adalah peta dari fungsi f oleh x. Selanjutnya $f(x) = x + 3$ disebut **rumus fungsi f**. Himpunan P disebut **domain** atau **daerah asal**, himpunan Q disebut **kodomain** atau **daerah kawan**, sedangkan himpunan semua peta, yaitu $\{3,4,5,6,7\}$ disebut **range** atau **daerah hasil** fungsi f.

Jika sebuah fungsi diketahui domain dan rumusnya, maka daerah hasilnya dapat ditentukan. Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh

1. Sebuah fungsi f ditentukan oleh rumus $f(x) = x^2 - 2$, sedangkan domainnya ialah $D = \{x \mid -2 \le x \le 2, x \text{ bilangan bulat}\}$. Tentukan daerah hasil fungsi f!

   Penyelesaian:

   Anggota dari domain fungsi f adalah $-2, -1, 0, 1, 2$. Daerah hasil fungsi f dapat dicari dengan menentukan peta oleh $-2, -1, 0, 1, 2$ secara berturut-turut. Selanjutnya, fungsi f dapat disajikan dengan himpunan pasangan terurut $\{(-2,2), (-1,-1), (0,-2), (1,-1), (2,2)\}$.

2. Diberikan sebuah fungsi $f = 2x + 3$, apabila domain fungsi tersebut dibatasi oleh $-1 \le x \le 3, x \in$ bilangan bulat, maka tentukan hasil pemetaan dari fungsi tersebut.

Penyelesaian:

Anggota domain fungsi f adalah $-1, 0, 1, 2, 3$.

Hasil pemetaan dari masing-masing anggota domain adalah:

$x = -1 \rightarrow f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$

$x = 0 \quad \rightarrow f(0) = 2(0) + 3 = 3$

$x = 1 \quad \rightarrow f(1) = 2(1) + 3 = 5$

$x = 2 \quad \rightarrow f(2) = 2(2) + 3 = 7$

$x = 3 \quad \rightarrow f(3) = 2(3) + 3 = 9$

Jadi, hasil pemetaan fungsi f berturut-turut adalah $1, 3, 5, 7, 9$.

Dalam membicarakan suatu fungsi, kita jarang menyebutkan domain dari fungsi yang dibicarakan, sehingga hal ini membuat semesta pembicaraan menjadi tidak jelas.

Anggota domain fungsi f diartikan sebagai suatu bilangan x yang mengakibatkan $f(x)$ terdefinisi. Kalimat terdefinisi disini yang dimksud adalah apabila terdapat himpunan semua x yang mengakibatkan $f(x)$ real dan tunggal. Jadi, apabila bilangan x tersebut tidak mengakibatkan $f(x)$ real atau tunggal, maka x bukan anggota dari domain fungsi.

Misalnya fungsi bentuk akar yang dirumuskan $f(x) = \sqrt{x-5}$, maka domainnya adalah $\{x/x \geq 5\}$, sebab $\sqrt{(x-5)}$ akan bernilai real dan tunggal jika bentuk di bawah tanda akar tidak negatif.

Contoh

1. Fungsi f ditentukan oleh rumus $f(x) = \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x}$.

   Tentukan:

   a. Domain fungsi f

   b. Daerah hasil fungsi f

   c. **Penyelesaian**:

   a. $f(x)$ real dan tunggal, bila $x^2 - 16 \geq 0$ dan $x \geq 0$.

      $x^2 - 16 = (x+4)(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ atau $x \leq -4$.

     Domain $D = \{x/x \geq 4\}$.

Untuk $x \geq 4$, maka $f(x) \geq \sqrt{4}$. Daerah hasil $H = \{f(x) | f(x) \geq \sqrt{4}\}$.

2. Fungsi f ditentukan oleh rumus $f(x) = 2 - {}^{3}\log({}^{3}\log x)$.

   Tentukan:

   a. Domain dari fungsi f

   b. Range dari fungsi f

   Penyelesaian:

   a. Agar $f(x)$ real dan tunggal, maka x harus memenuhi syarat-syarat berikut:

      1) $x > 0$ (karena numerus pada ${}^{3}\log x$ harus positif)

      2) ${}^{3}\log x > 0$ (karena numerus dari ${}^{3}\log({}^{3}\log x)$ adalah ${}^{3}\log x$, sehingga diperoleh sebagai berikut:

      $${}^{3}\log x > 0 \Leftrightarrow {}^{3}\log x > {}^{3}\log 3^{0}$$
      $$\Leftrightarrow x > 3^{0}$$
      $$\Leftrightarrow x > 1$$

      3) $2 - {}^{3}\log({}^{3}\log x) \geq 0$

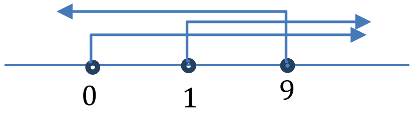
      $$2 - {}^{3}\log({}^{3}\log x) \geq 0 \Leftrightarrow -{}^{3}\log({}^{3}\log x) \geq -2$$
      $$\Leftrightarrow {}^{3}\log({}^{3}\log x) \leq 2$$

      misal ${}^{3}\log x = y$, maka diperoleh:

      $${}^{3}\log y \leq 2$$

      $${}^{3}\log y \leq {}^{3}\log 3^{2}$$

      $$y \leq 9$$



Berdasarkan garis bilangan diatas, maka dapat dilihat bahwa ketiga himpunan itu saling beririsan. Domain dari fungsi f merupakan irisan dari ketiga himpunan. Jadi dapat disimpulkan domainnya adalah $D = \{x|1 < x \leq 9, x \epsilon R\}$.

b. Untuk $1 < x \leq 9, f(x) \geq 0$. Jadi daerah hasilnya adalah $H = \{f(x)|f(x) \geq 0\}$.

3. Diberikan suatu fungsi $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

   a. Domain fungsi $f(x)$

   b. Range dari fungsi $f(x)$

   Penyelesaian:

   a. Untuk menentukan domain fungsi $f(x)$ maka perhatikan bahwa $f(x)$ merupakan suatu fungsi bentuk pecahan. Ingat kembali bahwa pecahan (bilangan rasional) adalah suatu bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$, dimana $q \neq 0$. Hal ini berarti penyebut tidak boleh bernilai 0. Domain fungsi $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ diperoleh jika $2x + 1 \neq 0$ atau $x \neq -\frac{1}{2}$. Jadi domain fungsi $f(x)$ adalah $\left\{x \mid x \neq -\frac{1}{2}, x \in R\right\}$.

   b. Untuk $x \neq -\frac{1}{2}$, maka dapat diperoleh:

$$y = \frac{1}{2x+1} \rightarrow 2x + 1 = \frac{1}{y}$$

$$2x = \frac{1}{y} - 1$$

$$x = \frac{\frac{1}{y} - 1}{2}$$

$$x = \frac{\frac{1-y}{y}}{2}$$

$$x = \frac{1-y}{2y}, dimana\ 2y \neq 0$$

Jadi, range dari fungsi $f(x)$ adalah $\{y \mid y \neq 0, y \in R\}$

C. Grafik Fungsi

Pada sub bab sebelumnya telah dibahas bahwa dalam menyatakan rumus fungsi misalnya sebuah fungsi f memetakan x ke $2x+3$, maka rumus fungsi f dinyatakan sebagai $f(x) = 2x+3$. Suatu fungsi f dengan domain D dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut $\{(x, f(x)) | x \text{ anggota } D\}$.

Grafik fungsi f ialah himpunan pasangan terurut (x, y) dengan x anggota domain D dan y adalah peta dari x oleh fungsi f, yang dapat kita nyatakan sebagai $\{(x, y) | y = f(x), x \text{ anggota } D\}$. Selanjutnya $y = f(x)$ disebut persamaan dari grafik fungsi (Moesono, 1988). Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh

1. Tentukan apakah $x^2 + y^2 = 10$ merupakan fungsi atau bukan fungsi!

   Penyelesaian:

   Jika, $x = 1 \rightarrow 1^2 + y^2 = 10$

   $$y^2 = 9$$

   $$y = \pm 3$$

   Karena hasil pemetaan , $x = 1$ tidak tunggal, $x^2 + y^2 = 0$ **bukan fungsi**.
2. Diberikan suatu persamaan $y = \sqrt{5 - x^2}$. Apakah $y = \sqrt{5 - x^2}$ merupakan suatu fungsi?

Penyelesaian:

Untuk mengetahui apakah $y = \sqrt{5 - x^2}$ fungsi atau bukan, maka dapat dicoba menentukan hasil pemetaan dari beberapa anggota domainnya, yaitu:

$x = -1 \to y = 2$

$x = 0 \to y = \sqrt{5}$

$x = 1 \to y = 2$

$x = 2 \to y = \sqrt{1}$

$x = 3 \to y = \sqrt{-4}$

Karena hasil pemetaan setiap anggota domain fungsi berturut-turut memiliki pasangan tepat satu, maka $y = \sqrt{5 - x^2}$ merupakan suatu **fungsi**.

Dalam menggambar suatu grafik fungsi, perlu dipahami perbedaan antara rumus fungsi dan persamaan grafik. Apakah keduanya memiliki arti yang sama? Perhatikan penjelasan berikut.

Seringkali kalian mendengar pembahasan tentang fungsi kudarat, persamaan kuadarat, atau bahkan persamaan grafik fungsi kuadrat. Ketiganya mempunyai arti yang berbeda. Fungsi kuadrat didefiniskan sebagai suatu fungsi f pada himpunan bilangan real R yang ditentukan oleh rumus $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$. Sedangkan Grafik fungsi kuadrat dinyatakan sebagai $f : x \to ax^2 + bx + c$ dan persamaannya adalah $y = ax^2 + bx + c$. Jadi, ketiganya dapat dirinci sebagai berikut:

1. Persamaan kuadrat dinyatakan dalam $ax^2 + bx + c = 0$.

2. Rumus fungsi kuadrat f dinyatakan dalam $f(x) = ax^2 + bx + c$.
3. Persamaan grafik dari fungsi kuadrat atau disebut sebagai persamaan dari fungsi kuadrat dinyatakan sebagai $y = ax^2 + bx + c$.

Contoh

Suatu fungsi f dirumuskan sebagai $f(x) = x^2 - 2|x| - 3$ dengan domain $-4 \leq x \leq 4$. Tentukan:

a. Grafik fungsi f

b. Daerah hasil fungsi f

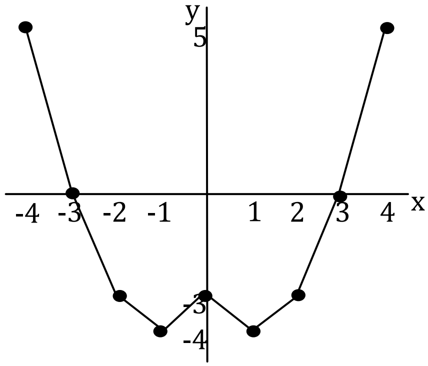
Penyelesaian:

a. Untuk $x \geq 0 \rightarrow |x| = x$, maka $f(x) = x^2 - 2x - 3$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	21	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

Untuk $x < 0 \rightarrow |x| = -x$, maka $f(x) = x^2 + 2x - 3$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0	5	12	21



Gambar 3.5. Gambar Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 2|x| - 3$

b. Daerah hasilnya adalah $H = \{-4, -3, 0, 5\}$

D. Macam-Macam Fungsi

Dalam subtopik ini akan dibicarakan macam-macam fungsi yang sering kita gunakan dalam kalkulus.

1. Fungsi Eksplisit dan Implisit

   a. Fungsi eksplisit

   Pada persamaan fungsi eksplisit dijabarkan bahwa variabel x dan y tidak berada dalam satu ruas yang sama, misalnya $y = 2x^2 - x + 3$.

   b. Fungsi implisit

   Persamaan fungsi implisit, dinyatakan bahwa x dan y berada dalam satu ruas sama, misalnya, $2x + 3y - 6 = 0$.

2. Fungsi Rasional

   Fungsi f disebut fungsi rasional, jika rumus fungsi itu dapat ditulis sebagai hasil bagi dua bentuk polinom (suku banyak) dalam x, yaitu

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} + b_m}$$

   dengan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$ suatu konstanta real, sedangkan n dan m suatu bilangan asli. Ini berarti bahwa dalam rumus fungsi itu hanya dilakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian terhadap variabel x (Moesono, 1988).

   Berdasarkan Moesono (1988), fungsi rasional dibagi menjadi dua macam, yaitu:

a. Fungsi rasional bulat atau fungsi polinom

Dikatakan fungsi rasional bulat jika operasi pembagian tidak dilakukan terhadap perubah x. jadi rumus fungsi itu dapat ditulis $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} + a_n$. Misalnya, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$.

b. Fungsi rasional pecah

Dikatakan fungsi rasional pecah jika operasi pembagian dilakukan terhadap perubah x. Misalnya, $f(x) = \frac{x-2}{2x^2-x-6}$

3. Fungsi Aljabar

Fungsi f disebut <u>fungsi aljabar</u>, jika dalam rumus fungsi itu hanya dilakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, atau penarikan akar terhadap perubah x.

a. Fungsi rasional

Fungsi f disebut fungsi rasional, jika operasi penarikan akar tidak dilakukan terhadap perubah x.. Misalnya, $f(x) = 2x + 1$

b. Fungsi irasional

Fungsi f disebut fungsi irasional, jika operasi penarikan akar dilakukan terhadap perubah x. Misalnya, $f(x) = x^2 - \sqrt{x}, g(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x}}, h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

4. Fungsi Transenden

Semua fungsi yang bukan fungsi aljabar dinamakan fungsi transenden. Beberapa fungsi transenden yang penting antara lain ialah:

1) Fungsi eksponen, misalnya $y = 12^x$

2) Fungsi logaritma, misalnya $y = log_5 3x$

3) Fungsi trigonometri, misalnya $y = cos(sin\, x)$

4) Fungsi siklometri, misalnya $y = arc\, sin\, x$

5. Fungsi Genap dan Ganjil

   a. Fungsi genap

   Fungsi f dengan persamaan $y = f(x)$ disebut fungsi genap, jika untuk setiap x dalam domain fungsi itu berlaku $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.

   Misalnya, $f(x) = 2x^2 - cos\, x$ adalah fungsi genap,

   Sebab $f(-x) = 2(-x)^2 - cos(-x)$

   $= 2x^2 - cos\, x$

   $f(-x) = f(x)$

   b. Fungsi ganjil

   Fungsi f dengan persamaan $y = f(x)$ disebut fungsi ganjil, jika untuk setiap x dalam domain fungsi itu berlaku $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.

   Misalnya, $f(x) = x + 2\, sin\, x$ adalah fungsi ganjil,

   Sebab $f(-x) = -x + 2\, sin(-x)$

   $= -x + (-2\, sin\, x)$

   $= -(x + 2\, sin\, x)$

   $f(-x) = -f(x)$

6. Fungsi Periodik

   Fungsi f dengan persamaan $y = f(x)$ disebut fungsi periodik, jika dapat ditentukan suatu konstanta positif p dalam domain D, sehingga untuk setiap x dalam domain D berlaku $f(x + p) = f(x)$. Nilai p terkecil dan positif disebut periode fungsi itu.

Contoh

1. Tunjukkan bahwa $f(x) = \cos x$ adalah periodik, dan tunjukkan periodenya!

   Penyelesaian:

   $f(x) = \cos x$ adalah periodik, sebab kita dapat menentukan konstanta positif p, yaitu $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ sehingga

$$f(x+p) = \cos(x+p)$$
$$f(x+p) = \cos(x+2\pi)$$
$$f(x+p) = \cos x$$
$$f(x+p) = f(x)$$

   karena nilai p yang terkecil dan positif adalah 2π, maka periodenya adalah 2π.

2. Tentukan periode $f(x) = \cos 4x$, kemudian tentukan periode $g(x) = a\cos(bx+c)$, jika a, b, c bilangan real!

   Penyelesaian:

$$f(x) = \cos 4x$$
$$f(x + 2\pi) = \cos(4x + 2\pi)$$
$$f(x + 2\pi) = \cos 4\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$$
$$f(x + 2\pi) = f\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

   Jadi, periode $f(x) = \cos 4x$ adalah $p = \frac{1}{2}\pi$

$$g(x) = a\cos(bx+c)$$
$$g(x + 2\pi) = a\cos(bx + c + 2\pi)$$
$$g(x + 2\pi) = a\cos\left[b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) + c\right]$$
$$g(x + 2\pi) = g\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)$$

jadi, periode $g(x) = a\cos(bx+c)$ adalah $p = \frac{2\pi}{b}$, rumus periode ini biasanya sering dipakai sebagai rumus umum periode $f(x) = \cos bx$.

3. Tentukan periode $f(x) = \cos^2 x$!

   Penyelesaian:

   $f(x) = \cos^2 x$

   karena, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

   $\Leftrightarrow \quad \cos 2x + 1 = 2\cos^2 x$

   $\Leftrightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$

   Maka,

   $f(x) = \cos^2 x$

   $= \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$

   $f(x + 2\pi) = \frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{1}{2} + 2\pi\right)$

   $f(x + 2\pi) = \frac{1}{2}\cos\left[2(x+\pi) + \frac{1}{2}\right]$

   $f(x + 2\pi) = f(x + \pi)$

   jadi, periode $f(x) = \cos^2 x$ adalah $p = \pi$

4. Tentukan periode $f(x) = 2\sin 2x + 3\cos x + \tan\frac{1}{3}x$!

   Penyelesaian:

   Misalkan $f_1(x) = 2\sin 2x$, periodenya $p_1 = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

   $f_2(x) = 3\cos x$, periodenya $p_2 = 2\pi$

   $f_3(x) = \tan\frac{1}{3}x$, periodenya $p_3 = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 2\pi \times 3 = 6\pi$

   periode dari $f(x) = 2\sin 2x + 3\cos x + \tan\frac{1}{3}x$ adalah KPK dari $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ maka periodenya adalah 6π.

5. Fungsi Bilangan Bulat Terbesar

$f(x) = [x]$ disebut fungsi bilangan bulat terbesar dan didefinisikan $[x] =$ bilangan bulat terbesar $\leq x$.

a. Grafik fungsi $y = [x]$

$y = n$ jika $n \leq x < n + 1$, jadi

$y = 0$ jika $0 \leq x < 1$,

$y = 1$ jika $1 \leq x < 2$,

$y = 2$ jika $2 \leq x < 3$,

$y = -1$ jika $-1 \leq x < 0$, dst

b. Grafik fungsi $y = 2x - 1$

$y = n$ jika $n \leq 2x - 1 < n + 1$

$n + 1 \leq 2x < n + 2$

$$\frac{1}{2}(n+1) \leq x < \frac{1}{2}(n+2)$$

Jadi,

$y = 0$ jika $\frac{1}{2} \leq x < 1$,

$y = 1$ jika $1 \leq x < \frac{3}{2}$,

$y = 2$ jika $\frac{3}{2} \leq x < 2$,

$y = -1$ jika $0 \leq x < \frac{1}{2}$,

$y = -2$ jika $-\frac{1}{2} \leq x < 0$, dst

6. Fungsi Monoton

a. Fungsi f dikatakan naik dalam selang (a, b) bila dan hanya bila untuk setiap pasang nilai x_1 dan x_2 yang memenuhi $a < x_1 < x_2 < b$ berlaku $f(x_1) < f(x_2)$.

b. Fungsi f dikatakan turun dalam selang (a, b) bila dan hanya bila untuk setiap pasang nilai x_1 dan x_2 yang memenuhi $a < x_1 < x_2 < b$ berlaku $f(x_1) > f(x_2)$.

c. Fungsi f dikatakan monoton dalam selang (a, b) bila fungsi f naik dalam selang itu (monoton naik) atau bila fungsi f turun dalam selang itu (monoton turun).

Ciri grafik fungsi f yang monoton dalam domainnya ialah bahwa setiap garis sejajar sumbu Y memotong grafik di satu titik (karena f suatu fungsi) dan setiap garis sejajar sumbu X memotong grafik di satu titik (karena f monoton).

Contoh

1. Tunjukkan bahwa $f(x) = 2^{-x}$ monoton turun!

   Penyelesaian:

   Ambil $x_1 < x_2$, maka $2^{x_1} < 2^{x_2}$ atau $2^{-x_1} > 2^{-x_2}$, jadi $f(x_1) > f(x_2)$. Maka $f(x)$ monoton turun.

2. Tunjukkan bahwa $f(x) = \sin x$ monoton naik dalam selang $(0, \frac{1}{2}\pi)$!

   Penyelesaian:

   Ambil $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{2}\pi$, namakan $x_2 - x_1 = h > 0$

   Maka $f(x_1) = \sin x_1$ dan $f(x_2) = \sin x_2$. Jadi

   $f(x_2) - f(x_1) = \sin(x_1 + h) - \sin x_1 = 2\cos\left(x_1 + \frac{1}{2}h\right)\sin\frac{1}{2}h$

   Karena $0 < x_1 + \frac{1}{2}h < \frac{1}{2}\pi$, maka $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

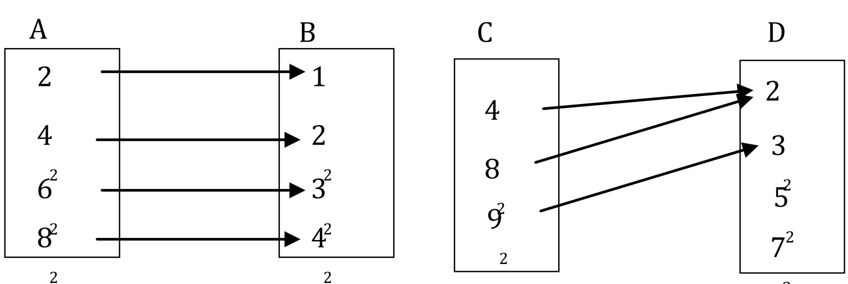
   Jadi $f(x)$ monoton naik dalam selang $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

E. Fungsi Invers

Telah kita ketahui bahwa fungsi f dari himpunan P ke himpunan Q adalah suatu relasi yang mengawankan setiap anggota himpunan P dengan tepat satu anggota himpunan Q.

Gambar 3.6 (a) menunjukkan diagram panah fungsi f dari himpunan $A = \{2,4,6,8\}$ ke himpunan $B = \{1,2,3,4\}$ yang ditentukan oleh relasi “dua kali”. Himpunan A adalah domain, himpunan B kodomain, dan himpunan semua peta yaitu $\{1,2,3,4\}$ adalah daerah hasil fungsi f.

Gambar 3.6 (b) menunjukkan diagram panah fungsi g dari himpunan $C = \{4,8,9\}$ ke himpunan $D = \{2,3,5,7\}$ yang ditentukan oleh relasi “kelipatan”. Himpunan C adalah domain, himpunan D kodomain, dan himpunan semua peta yaitu $\{2,3\}$ adalah daerah hasil fungsi g.



(a) **(b)**

Gambar 3.6. Hasil pemetaan fungsi

Apakah perbedaan antara fungsi f dan fungsi g di atas? Pada fungsi f tidak ada anggota-anggota himpunan A yang mempunyai peta yang sama dalam B. fungsi demikian disebut <u>fungsi injektif</u> atau <u>fungsi satu-satu</u>.

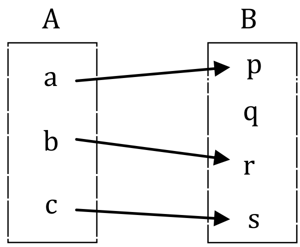
Pada fungsi g terdapat anggota himpunan C. Yaitu 4 dan 8, yang mempunyai peta yang sama dalam himpunan D. Fungsi demikian dikatakan bukan fungsi injektif.

Perhatikan sekali lagi fungsi f pada **Gambar 3.6 (a)** dan fungsi pada **Gambar 3.6 (b)**!

Pada fungsi f ternyata bahwa daerah hasilnya sama dengan kodomainnya, yaitu $\{1,2,3,4\}$. Fungsi demikian disebut <u>fungsi surjektif</u> atau <u>fungsi onto</u>. Pada fungsi g ternyata bahwa daerah hasilnya beda dengan kodomainnya, yaitu $\{2,3\}$. Fungsi demikian dikatakan bukan fungsi surjektif, dan disebut <u>fungsi into</u>. Fungsi yang sekaligus merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif disebut <u>fungsi bijektif</u>. Fungsi f pada **Gambar 3.6 (a)** adalah fungsi bijektif.

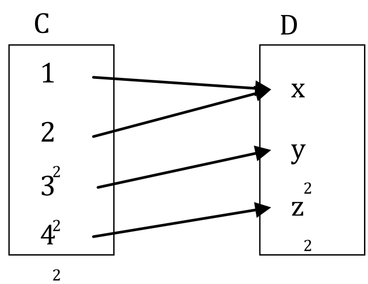
Jika f adalah fungsi yang memetakan himpunan A ke himpunan B, maka setiap anggota a himpunan A dipetakan secara tunggal ke $b = f(a)$ anggota himpunan B. Sekarang timbul pertanyaan, yaitu apakah selalu terdapat fungsi g yang memetakan anggota himpunan B ke anggota himpunan A, sehingga $g(b) = a$? Untuk dapat menjawab pertanyaan di atas, perhatikan tiga contoh fungsi berikut.

1. Fungsi h dari himpunan A ke himpunan B bukan fungsi surjektif. Dengan membalik arah anak panah, ternyata tidak menentukan suatu fungsi dari himpunan B ke himpunan A. Lihat **Gambar 3.7**.



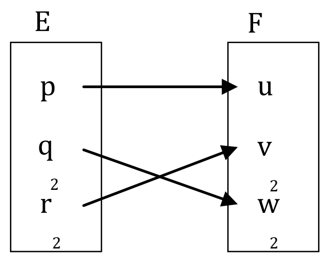
Gambar 3.7. Pemetaan A ke B

2. Fungsi k dari himpunan C ke himpunan D bukan fungsi injektif. Dengan membalik arah anak panah, ternyata tidak menentukan suatu fungsi dari himpunan D ke himpunan C. Lihat **Gambar 3.8**.



Gambar 3.8. Pemetaan C ke D

3. Fungsi m dari himpunan E ke himpunan F adalah fungsi bijektif. Dengan membalik arah anak panah, ternyata menentukan suatu fungsi dari himpunan F ke himpunan E. Lihat **Gambar 3.9**.



Gambar 3.9. Pemetaan E ke F

Jadi jika fungsi m dari himpunan E ke himpunan F adalah fungsi bijektif, maka selalu terdapat fungsi dari himpunan F ke himpunan E, yang disebut fungsi invers dari fungsi m.

Jadi jika fungsi f memetakan himpunan A ke himpunan B, dan terdapat fungsi g yang memetakan himpunan B ke himpunan A, maka fungsi f dan g masing-masing adalah fungsi bijektif. Dikatakan bahwa fungsi g adalah invers fungsi f, dan dinyatakan dengan f^{-1} (dibaca invers f). Juga fungsi f adalah invers fungsi g, dan dinyatakan dengan g^{-1} (dibaca invers g).

Ciri grafik fungsi f yang mempunyai invers dalam domainnya ialah bahwa setiap garis sejajar sumbu Y memotong grafik di satu titik (karena f suatu fungsi) dan setiap garis sejajar sumbu X memotong grafik di satu titik (karena f mempunyai invers).

TEOREMA: jika fungsi f monoton dalam domainnya, maka fungsi f mempunyai invers.

Jika suatu fungsi f diketahui rumusnya, bagaimanakah cara kita menentukan rumus fungsi inversnya? Untuk dapat menjawab pertanyaan di atas, perhatikan contoh-contoh berikut ini.

Contoh

Suatu fungsi f pada himpunan bilangan real R ditentukan oleh rumus $f(x) = 2x - 3$. Tentukan rumus fungsi inversnya!

Penyelesaian:

Cara 1

Memisalkan $f(x) = y$

$f(x) = 2x - 3$

Tukarkan letak x dan y

$$-2x = -y - 3$$
$$-2x = -(y+3)$$
$$x = \frac{y+3}{2}$$

Mengganti $y \to x$, dan $x \to f^{-1}(x)$

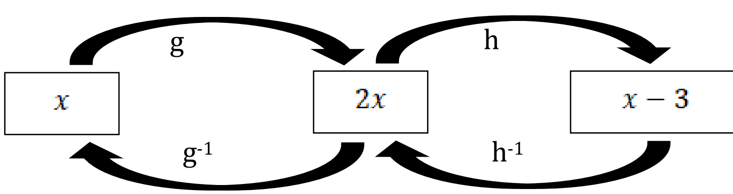
$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2} = \frac{1}{2}(x+3)$$

Cara 2

$g(x) = 2x \to g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$

$h(x) = 2x - 3 \to h^{-1}(x) = x + 3$

Perhatikan **Gambar 3.10**



Gambar 3.10. Ilustrasi komposisi fungsi

Dari **Gambar 3.10** kita peroleh

$f^{-1}(x)$

$= g^{-1} \circ h^{-1}$

$= g^{-1}(h^{-1}(x))$

$= g^{-1}(x+3)$

$= \frac{1}{2}(x + 3)$

Jadi bila $y = 2x - 3$, maka inversnya ialah $y = \frac{1}{2}(x + 3)$.

Contoh

1. Tentukan invers dari $y = \sqrt{x+1}$!

   Penyelesaian:

   Hilangkan akar pada ruas kanan

   $y^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$

   $y^2 = x + 1$

   Tukarkan letak x dan y

   $-x = -y^2 + 1$

   $-x = -(y^2 - 1)$

   $x = y^2 - 1$

   Mengganti $y \to x$, dan $x \to y$

   $y = x^2 - 1$

   Jadi, invers dari $y = \sqrt{x+1}$ adalah $y = x^2 - 1$

Dalam buku ini yang dimaksud dengan "invers" suatu fungsi adalah "fungsi invers". Misalnya $f(x) = x^2$ tidak mempunyai (fungsi) invers, karena grafik f tidak monoton.

Ada buku yang mengatakan bahwa $f(x) = x^2$ mempunyai invers, tetapi invers ini bukan suatu fungsi. Jadi (relasi) invers dari $f(x) = x^2$ ialah $f^{-1}(x) = \pm x$. Jika dalam buku ini dikatakan bahwa fungsi f tidak mempunyai invers, artinya fungsi f mempunyai relasi invers.

F. Invers Fungsi Trigonometri Dan Fungsi Eksponen

Sekarang akan kita bicarakan tentang invers fungsi trigonometri. Perhatikan fungsi f yang memetakan x ke $sin\, x$. Persamaan dari grafik fungsi f ialah $y = sin\, x$.

Untuk menentukan inversnya, kita nyatakan lebih dulu x dalam y. Untuk itu hendaknya kita ingat bahwa x adalah sudut (dalam radian) atau busur yang sinusnya sama dengan y.

Pernyataan ini dapat kita tulis sebagai $x =$ busur sinus y atau $x = arcsin\, y$, jika arc adalah singkatan dari perkataan arcus, yang artinya busur. Jadi $y = sin\, x$ dan $x = arcsin\, y$ (dibaca arcus sinus y) mempunyai arti yang sama.

Dari $x = arcsin\, y$, tukarlah tempat x dan y. Kita peroleh invers dari $y = sin\, x$, yaitu $y = arcsin\, x$. Demikian pula invers dari $y = cos\, x$ adalah $y = arccos\, x$, dan invers dari $y = tan\, x$ adalah $y = arctan\, x$. fungsi-fungsi invers ini dinamakan fungsi siklometri. Jadi invers fungsi trigonometri adalah fungsi siklometri. Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh

1. Tentukan nilai:
   a. $\arcsin \frac{1}{2}$
   b. $\arccos \frac{1}{2}$
   c. $arctan\ 1$

   Penyelesaian:

   a. Misalkan $arcsin \frac{1}{2} = x$, artinya $sin\, x = \frac{1}{2}$. Jadi $x = 1/6\, \pi + 2k\pi$ atau $x = 5/6\, \pi + 2k\pi$, jika k bilangan bulat, maka $arcsin\,\frac{1}{2} = 1/6\,\pi + 2k\pi$ atau $5/6\,\pi + 2k\pi$.

Ternyata bahwa $arcsin\,\frac{1}{2}$ bernilai banyak.

b. Misalkan $arccos\,\frac{1}{2} = y$, artinya $cos\,y = \frac{1}{2}$. Jadi $y = \pm 1/3\,\pi + 2k\pi$, jika k bilangan bulat, maka $arccos\,\frac{1}{2} = \pm 1/3\,\pi + 2k\pi$.

c. Misalkan $arctan\,1 = z$, artinya $tan\,z = 1$. Jadi $z = \frac{1}{4}\pi + k\pi$, jika k bilangan bulat, maka $arctan\,1 = \frac{1}{4}\pi + k\pi$.

Sekarang kita perhatikan suatu relasi R dari himpunan A ke himpunan B yang ditentukan oleh $R(x) = arcsin\,x$. Lihat **Gambar 3.11**.

Relasi R ini ternyata bukan suatu fungsi. Sebab $\frac{1}{2}$ anggota himpunan A dikawankan dengan $arcsin\,\frac{1}{2}$ anggota himpunan B, padahal $arcsin\,\frac{1}{2}$ bernilai banyak. Ini berarti bahwa:

$\frac{1}{2} \to 1/6\,\pi$

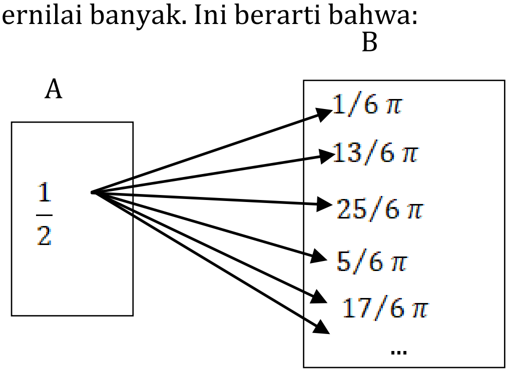
$\frac{1}{2} \to 13/6\,\pi$

$\frac{1}{2} \to 25/6\,\pi$

$\frac{1}{2} \to 5/6\,\pi$

$\frac{1}{2} \to 17/6\,\pi$

$\frac{1}{2} \to \ldots$



Gambar 3.11. Pemetaan $arcsin\,\frac{1}{2}$

Jadi $\frac{1}{2}$ anggota himpunan A mempunyai banyak kawan anggota himpunan B. maka relasi $R : x \to arcsin\,x$ bukan suatu fungsi. Relasi R di atas akan merupakan suatu fungsi, bila setiap x anggota himpunan A dikawankan dengan tepat satu nilai $arcsin\, x$ anggota himpunan B. Sebenarnya $f(x) = sin\, x$ tidak mempunyai invers, karena fungsi itu tidak monoton. Tetapi kita dapat membatasi domainnya pada selang $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ supaya fungsi f mempunyai invers, karena pada selang itu fungsi f monoton (naik). Jadi invers dari $f(x) = sin\, x \left(-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi\right)$ ialah $f^{-1}(x) = arcsin\, x\ (-\frac{1}{2}\pi \leq arcsin\, x \leq \frac{1}{2}\pi)$.

Jika ditentukan grafik fungsi $y = f(x)$, bagaimanakah cara kita menggambar grafik fungsi inversnya?

1. Dari persamaan $y = f(x)$, nyatakan x dalam y, sehingga kita peroleh $x = g(y)$.
2. Jika x dan y bertukar tempat, diperoleh persamaan inversnya, yaitu $y = g(x)$.

Dari uraian di atas ternyata bahwa bila $P(a, b)$ terletak pada grafik $y = f(x)$ atau $x = g(y)$, maka titik $Q(b, a)$ terletak pada grafik $y = g(x)$. titik $P(a, b)$ dan $Q(b, a)$ terletak simetris terhadap garis $y = x$. Berarti grafik $y = g(x)$ dapat diperoleh dari grafik $y = f(x)$ dengan mencerminkannya terhadap garis $y = x$.

Sifat-sifat logaritma:

Jika $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$, dan n suatu konstanta, maka:

1) $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \times c)$

2) $\log_a b - \log_a c = \log_a (b : c)$

3) $\log_a (b)^n = n \times \log_a b$

4) $\log_a b = \frac{\log_n b}{\log_n a}$

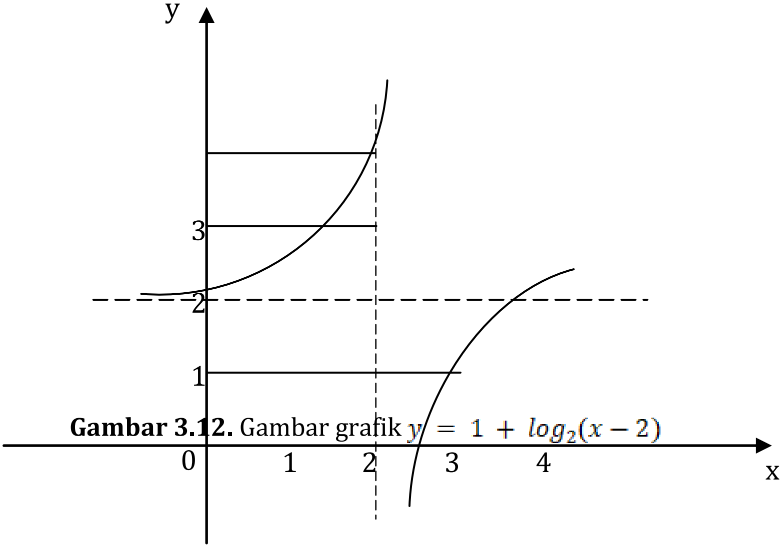
Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh

1. Diketahui $f(x) = 1 + log_2(x-2)$.
   a. Tentukan domain fungsi f!
   b. Untuk nilai-nilai x manakah $f(x) > 0$?
   c. Gambarlah grafik fungsi f dan tentukan persamaan asimtotnya!
   d. Tentukan persamaan fungsi invers, kemudian gambarlah grafiknya!

   Penyelesaian:

   a. $f(x)$ real dan tunggal, bila $x - 2 > 0$ atau $x > 2$. Jadi domain $D = \{x \,/\, x > 2\}$.
   b. $f(x) = 1 + log_2(x-2) > 0$, maka $\log_2(x-2) > \log_2 \frac{1}{2}$. Kita peroleh $x - 2 > \frac{1}{2}$ atau $x > 2\frac{1}{2}$.
   c. Karena $lim_{x \to 2}\, y = lim_{x \to 2}\, 1 + log_2(x-2) = -\infty$, maka garis $x = 2$, adalah asimtot (tegak). Untuk menggambar grafik $f(x)$, kita tentukan himpunan pasangan terurut $\{(2,-\infty),(2\frac{1}{2},0),(3,1),(4,2),(6,3),\dots\}$. Grafik fungsi f dapat kita lihat pada gambar 19.
   d. Dari persamaan $y = 1 + log_2(x-2)$, kita peroleh persamaan fungsi invers, yaitu $y = 2 + 2^{x-1}$. Untuk menggambar grafiknya, kita tentukan himpunan pasangan terurut $\{(-\infty,2),(0,2\,1/2),(1,3),(2,4),(3,6),\dots\}$. Grafik $y = 2 + 2^{x-1}$ mempunyai asimtot garis $y = 2$.



Gambar 3.12. Gambar grafik $y = 1 + log_2(x-2)$

2. Diketahui $f(x) = ln\frac{1+2x}{1-2x}$, perubah x pada himpunan bilangan real.
   a. Tentukan domain fungsi f!
   b. Untuk nilai x manakah $f(x) > 0$?
   c. Tentukan $lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ dan $lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x)$!
   d. Gambarlah grafik fungsi f!
   e. Tentukan persamaan fungsi inversnya!

   Penyelesaian:

   a. $f(x)$ real dan tunggal, bila $\frac{1+2x}{1-2x} > 0$ atau

   $(1+2x)(1-2x) > 0$

   $\Leftrightarrow (2x+1)(2x-1) < 0$

   $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

   Jadi domain $D = \left\{\frac{x}{-\frac{1}{2}} < x < \frac{1}{2}\right\}$

b. $f(x) = ln\frac{1+2x}{1-2x} > 0$, maka $\frac{1+2x}{1-2x} > 1$ atau

$$\frac{1+2x}{1-2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{1-2x} > 0$$
$$\Leftrightarrow 4x(1-2x) > 0$$
$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$$

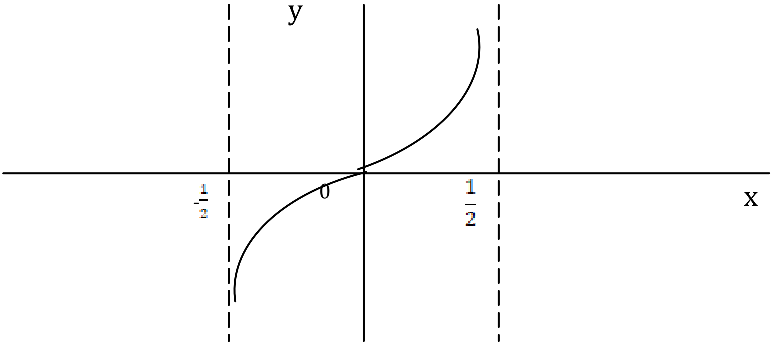
Jadi $f(x) > 0$ dalam selang $0 < x < \frac{1}{2}$

c. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \ln\frac{1+2x}{1-2x} = +\infty$dan

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \ln\frac{1+2x}{1-2x} = -\infty$,

Ini berarti bahwa garis-garis $x = \frac{1}{2}$ dan $x = -\frac{1}{2}$ merupakan asimtot tegak grafik fungsi f.

d. Grafik fungsi f dapat kita lihat pada **Gambar 3.13**.



Gambar 3.13. Gambar grafik fungsi $f(x) = ln\frac{1+2x}{1-2x}$

e. Dari persamaan $y = ln\frac{1+2x}{1-2x}$, kita nyatakan x dalam y.

Kita peroleh:

$$\frac{1+2x}{1-2x} = e^y$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2x = e^y(1-2x)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^y - 1}{2(e^y + 1)}$$

Jadi x dan y bertukar tempat, kita peroleh persamaan fungsi invers, yaitu $y = \frac{e^x - 1}{2(e^x + 1)}$.

G. Rangkuman

1. Fungsi adalah relasi yang memetakan setiap anggota himpunan domain tepat satu pada anggota kodomian.
2. Domain adalah himpunan daerah asal , kodomain adalah himpunan daerah kawan, sedangkan himpunan semua peta, disebut range atau daerah hasil.
3. Grafik fungsi f ialah himpunan pasangan terurut (x, y) dengan x anggota domain D dan y adalah peta dari x oleh fungsi f, yang dapat dinyatakan sebagai $\{(x, y) | y = f(x), x \text{ anggota } D\}$.
4. Macam-macam fungsi antara lain:
   a. Fungsi eksplisit dan implisit
   b. Fungsi rasional
   c. Fungsi aljabar
   d. Fungsi transenden
   e. Fungsi genap
   f. Fungsi ganjil
   g. Fungsi periodic
   h. Fungsi bilangan bulat
   i. Fungsi naik dan fungsi turun
5. jika fungsi f monoton dalam domainnya, maka fungsi f mempunyai invers.

6. Jika grafik fungsi $y = f(x)$, maka cara menggambar grafik fungsi inversnya yaitu:
   a. Dari persamaan $y = f(x)$, nyatakan x dalam y, sehingga kita peroleh $x = g(y)$.
   b. Jika x dan y bertukar tempat, diperoleh persamaan inversnya, yaitu $y = g(x)$.

H. Evaluasi

Berikut ini disaikan beberapa latihan soal supaya kalian dapat berlatih mengerjakan soal yang berkaitan dengan fungsi.

1. Tentukan domain fungsi-fungsi berikut:
   a. $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}$
   b. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$
   c. $h(x) = \ln \frac{x-3}{2x+1}$
   d. $f(x) = {}^{x}\log 2$
2. Tentukan daerah hasil dari fungsi-fungsi berikut:
   a. $f(x) = \frac{1}{3-\sin 3x}$
   b. $f(x) = \log(x+2)$
3. Gambarlah grafik fungsi yang ditentukan oleh persamaan berikut:
   a. $y = x^2 - 6x + 5$
   b. $y = x^2 - 3|x|$
   c. $y = |x^2 - 3x|$
4. Tentukan fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi ganjil atau genap.
   a. $f(x) = x^2 - 2|x|$
   b. $f(x) = x \ln(x^2 + 4)$
   c. $f(x) = \frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}$

5. Tentukan invers fungsi-fungsi berikut:
   a. $f(x) = 2x + 5$
   b. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
   c. $f(x) = 3 - e^{2x}$
6. Diberikan suatu grafik fungsi dengan persamaan $y = x^2 + 3x + 2$. Tentukan persamaan inversnya dan gambarlah grafiknya.
7. Diketahui suatu fungsi f yang dirumuskan sebagai $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x + 1)$. Tentukan:
   a. Domain dan range fungsi f
   b. Gambarlah grafik fungsi f
   c. Persamaan inversnya
   d. Gambarlah grafik invers fungsi f

*****

BAB 4
LIMIT DAN KEKONTINUAN

A. Pendahuluan

Topik ini merupakan bagian dari prakalkulus yang menyajikan dasar-dasar untuk kalkulus salah satunya tentang limit. Gagasan tentang inilah yang membedakan kalkulus dengan cabang ilmu matematika lainnya.

Kata "Limit" sebenarnya sering digunakan dalam kehidupan sehari sebagai contoh "Saya mendekati batas kesabaran saya". Beberapa pemakaian kata ini mempunyai hubungan dengan kalkulus. Pemahaman secara intuisi tentang limit dijelaskan sebagai berikut.

B. Definisi Limit

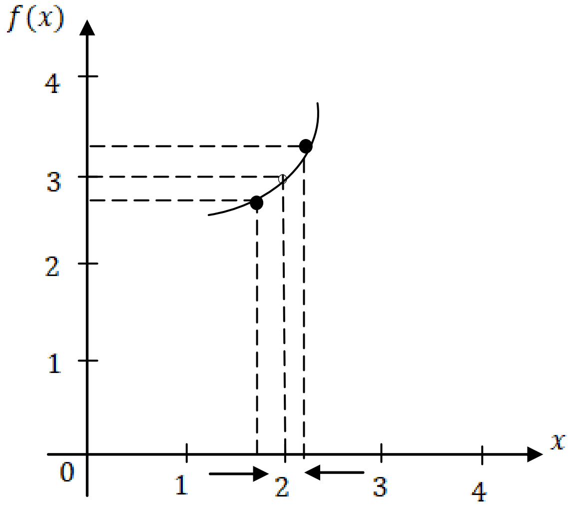
Perhatikan fungsi f yang dirumuskan sebagai $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{x-2}$. Fungsi $f(x)$ merupakan suatu fungsi rasional yang mempunyai domain $D_f = \{x/x \neq 2, x \in \mathbb{R}\}$. Artinya fungsi $f(x)$ tidak terdefinisi pada $x = 2$ sebab di titik ini $f(x)$ bernilai $\frac{0}{0}$. Namun apabila ditentukan suatu nilai x mendekati 2 maka $f(x)$ dapat ditentukan nilainya. Perhatikan tabel berikut!

Perhatikan tabel berikut!

$$\longrightarrow \mathbf{2} \longleftarrow$$

x	...	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	...
$f(x)$	...	2,8	2,98	2,998	3,002	3,02	3,1	...

Berdasarkan tabel diatas dapat dibuat grafik fungsi $f(x)$ sebagai berikut:



Gambar 4.1. Grafik fungsi $f(x)$ yang monoton

Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa jika nilai x mendekati 2 maka nilai $f(x)$ mendekati 3, dan nilai $f(x)$ tidak pernah tepat berada di 3. Akan tetapi, dapat ditentukan nilai $f(x)$ sedekat-dekatnya dengan nilai 3 dengan membuat nilai x sedekat mungkin dengan 2.

Berdasarkan hal tersebut, maka selanjutnya dapat ditentukan suatu selang misalnya S dimana selang ini berada di sekitar $x = 2$. Misalnya selang yang dipilih ini mengakibatkan selisih nilai $f(x)$ dengan 3 menjadi 0,0005. Selang S dapat ditentukan sebagai berikut:

Sebab selisih $f(x)$ dengan 3 kurang dari 0,0005, maka dapat dinyatakan $|f(x) - 3| < 0{,}0005$.

$$|f(x) - 3| < 0{,}0005$$

$$-0{,}0005 < f(x) - 3 < 0{,}0005$$

$$2{,}9995 < f(x) < 3{,}0005$$

$$2{,}9995 < 2x - 1 < 3{,}0005$$

$$3{,}9995 < 2x < 4{,}0005$$

$$1{,}99975 < x < 2{,}00025$$

Jadi, selang S adalah $1{,}99975 < x < 2{,}00025$.

Selang S dapat ditulis sebagai $2 - \delta < x < 2 + \delta$, dengan $\delta = 0{,}00025$. Nilai $x \neq 2$ bila $2 - \delta < x < 2 + \delta$, maka selang S dinyatakan sebagai $0 < |2x - 1| < \delta$. Hal ini dapat dinyatakan sebagai limit fungsi f pada $x = 2$ adalah 3 yang ditulis sebagai berikut:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(2x-1)(x-2)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} (2x - 1)$$

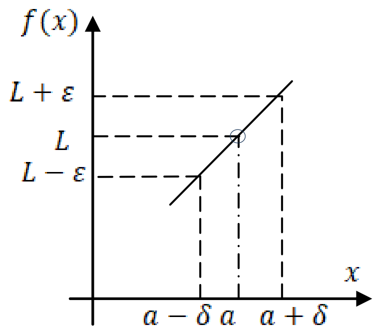
$$= 3$$

Hal ini berarti bahwa apabila terdapat bilangan kecil $\varepsilon = 0{,}0005$ dpt ditentukn bilangn kecil positif $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}0{,}0005 = 0{,}00025$ sehingga untuk semua x yang memenuhi $0 < |2x - 1| < \delta$ berlaku $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

Definisi Limit:

Fungsi f dikatakan mempunyai limit L pad $x = a$ dalam domain D_f, ditulis $\lim_{x \to a} f(x) = L$, jika pada setiap bilangan kecil positif δ, sehingga untuk semua x dalam domain D_f yang memenuhi $0 < |x - a| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Agar definisi limit lebih jelas, maka perhatikan gambar 4.2 berikut:



Gambar 4.2. Letak δ dan ε pada grafik

Perhatikan gambar 4.2 diatas, dari $|f(x)-L|<\varepsilon$ diperoleh $-\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon$ atau $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$. Perhatikan bahwa bilangan ε ditentukan terlebih dulu. Hal ini berarti bahwa kita ditentukan terlebih dulu garis yang sejajr sumbu X yang dibatasi oleh garis $y=L-\varepsilon$ dan $y=L+\varepsilon$. Kemudian kita berusaha mendapatkan bilangan kecil positif δ sehingga untuk setiap x dalam selang $a-\delta<x<a+\delta$, dengan $x\neq a$.

Contoh

Dengan menggunakan definisi limit, tunjukkan bahwa $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$!

Penyelesaian :

Secara definisi dituliskan

$\forall\ \varepsilon>0,$ terdapat $\delta>0$ sdh $0<|x-2|<\delta,$ maka $|x^2-4|<\varepsilon$

$|x^2-4| = |x+2||x-2| \leq \big||x|+2\big||x-2|$ (*)

Misalkan, $\delta=1$

Maka

$|x - 2| < 1$

$-1 < x - 2 < 1$

$-1 + 2 < x - 2 + 2 < 1 + 2$

$1 < x < 3$

Diperoleh, $|x| < 3$

Kembali ke (*)

$|x^2 - 4| < \big||x| + 2\big||x - 2|$

$|x^2 - 4| < \big||3| + 2\big||x - 2|$

$|x^2 - 4| < |3 + 2||x - 2|$

$|x^2 - 4| < |5||x - 2|$

$|x^2 - 4| < 5|x - 2|$

Jadi, jika $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$, maka $|x^2 - 4| < \varepsilon$. Kita pilih $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$, maka benar bahwa $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

C. Teorema Limit

Berikut ini adalah beberapa teorema limit yang sering digunakan dalam menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan kalkulus.

Andaikan n bilangan bulat positif, k konstanta, serta f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di a, maka:

1) $\lim_{x\to a} k = k$
2) $\lim_{x\to a} x = a$
3) $\lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x)$
4) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
5) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$
6) $\lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, asalkan $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
7) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$
8) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, asalkan $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ bilamana n genap.

D. Kekontinuan

Jika kita diminta untuk menentukan limit suatu fungsi f pada $x = a$, yaitu menentukan $\lim_{x\to a} f(x)$, maka seringkali kita menghitung nilai $f(a)$, yaitu nilai fungsi f untuk $x = a$. Misalnya $f(x) = x^2 - x - 2$, maka $\lim_{x\to a} f(x)$ dihitung sebagai:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} f(x) &= \lim_{x\to 3} x^2 - x - 2\\ &= 3^2 - 3 - 2\\ &= 4\\ &= f(3)\end{aligned}$$

Akan tetapi cara ini tidak selalu dapat dilakukan, misalnya jika $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, maka $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \neq f(0)$ sebab $f(0) = \frac{0}{0}$ (tidak terdefinisikan). Sedangkan $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Hal ini dapat dikatakan bahwa fungsi f tidak kontinu. Berdasarkan paparan diatas, maka definisi kekontinuan adalah sebagai berikut:

<u>Definisi Kekontinuan:</u>

Fungsi f dikatakan kontinu pada $x = a$, bila memenuhi syarat-syarat berikut:

1. $f(a)$ ada (dapat ditentukan nilainya)
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ ada (artinya $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ dibaca limit kiri sama dengan limit kanan)
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Bila paling sedikit salah satu syarat tidak terpenuhi, maka fungsi f dikatakan **diskontinu** pada $x = a$. Fungsi f dikatakan kontinu pada selang S, jika fungsi itu kontinu pada setiap titik pada selang S.

Contoh

1. Fungsi f ditentukan oleh $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.
   a. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x)$ diskontinu pada $x = 2$.
   b. Gambarlah grafik fungsi $f(x)$.
   c. Apakah diskontiuitas pada $x = 2$ dapat dihapus?

   Penyelesaian :

   a. Untuk menunjukkan bahwa fungsi f diskontinu, maka harus ada salah satu/lebih syarat yang tidak terpenuhi. Sekarang mari kita buktikan.
      1) $f(a)$ ada (dapat ditentukan nilainya)

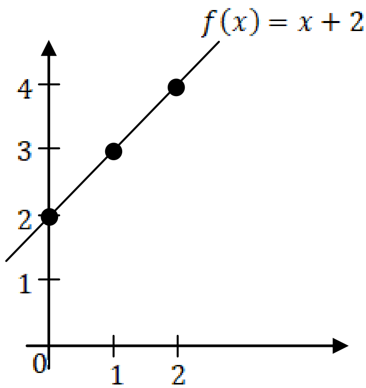
         Asumsikan $x = a$

         Jika $a = 2$, maka $f(2) = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0}$ (tidak ada)

Maka $f(a) = f(2)$ tidak ada nilainya.

Jadi, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ diskontinu pada $x = 2$.

b. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2$



c. Dapat, jika fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2 \\ 4, x = 2 \end{cases}$$

2. Fungsi f ditentukan oleh $f(x) = \begin{cases} x^2 \ (x \geq 1) \\ x + 3 \ (x < 1) \end{cases}$.

   a. Tunjukkan bahwa fungsi f diskontinu pada $x = 1$.

   b. Gambarlah grafik fungsi f.

   Penyelesaian :

   a. Untuk menunjukkan bahwa fungsi f diskontinu, maka harus ada salah satu/lebih syarat yang tidak terpenuhi. Sekarang mari kita buktikan.

      1) $f(a)$ ada (dapat ditentukan nilainya)

      Asumsikan $x = a$

      Jika $a = 1$, maka $f(1) = 1^2 = 1$, ada nilainya

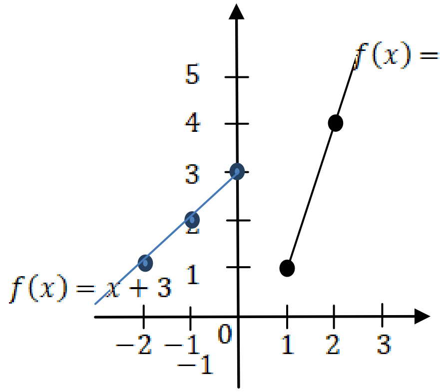
2) $\lim_{x\to a} f(x)$ ada

$\lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$

$\lim_{x\to 1^-} (x+3) = 4$

Maka $\lim_{x\to 1^+} x^2 \neq \lim_{x\to 1^-}(x+3)$

Jadi, $f(x)$ diskontinu pada $x = 1$



Dari contoh-contoh diatas dapat kita simpulkan bahwa suatu fungsi f mungkin diskontinu pada titik-titik berikut:

- ✓ Jika f suatu fungsi pecahan, maka nilai-nilai x yang menyebabkan penyebut sama dengan nol mungkin terjadi suatu kediskontinuan.
- ✓ Jika fungsi f dalam selang-selang tertentu berbeda rumusnya, maka pada batas-batas selang itu mungkin terjadi suatu kediskontinuan.

E. Rangkuman

1. Definisi limit: Fungsi f dikatakan mempunyai limit L pad $x = a$ dalam domain D_f, ditulis $\lim_{x\to a} f(x) = L$, jika pada setiap bilangan kecil positif δ, sehingga untuk semua x dalam domain D_f yang memenuhi $0 < |x - a| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

2. Andaikan n bilangan bulat positif, k konstanta, serta f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di a, maka:
   1) $\lim_{x\to a} k = k$
   2) $\lim_{x\to a} x = a$
   3) $\lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x)$
   4) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
   5) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x)$
   6) $\lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, asalkan $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
   7) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$
   8) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, asalkan $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ bilamana n genap.
3. Definisi kekontinuan: Fungsi f dikatakan kontinu pada $x = a$, bila memenuhi syarat-syarat berikut:
   1) $f(a)$ ada
   2) $\lim_{x\to a} f(x)$ ada (artinya $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ dibaca limit kiri sama dengan limit kanan)
   3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

F. Evaluasi

Setelah mempelajari bab ini, kerjakan latihan soal berikut agar kalian dapat memahami bab ini.

1. Dengan menggunakan definisi limit, buktikan bahwa:
   a. $\lim_{x\to 2}(x^2 + 4x) = 12$
   b. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$
   c. $\lim_{x\to 1}(2x + 1) = 3$
   d. $\lim_{x\to -1}(3x^2 - 1) = 2$
2. Selidiki apakah $f(x) = x^2 - 9$ kontinu pada $x = 3$!

3. Fungsi f ditentukan oleh $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{jika } x \leq 2 \\ (2-x)^2, \text{jika } x > 2 \end{cases}$.

   a. Tunjukkan bahwa fungsi f kontinu pada $x = 2$.

   b. Gambarlah grafik fungsi f.

4. Fungsi f ditentukan oleh $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$.

   a. Tunjukkan bahwa fungsi f diskontinu pada $x = 1$.

   b. Gambarlah grafik fungsi f.

5. Fungsi f ditentukan oleh $f(x) = \frac{x^2-36}{x-6}$.

   a. Tunjukkan bahwa fungsi f diskontinu pada $x = 6$.

   b. Gambarlah grafik fungsi f.

*****

BAB 5
TURUNAN

A. Pendahuluan

Turunan merupakan materi pokok dalam pembahasan mata kuliah kalkulus dasar. Materi ini sangat penting karena banyak berkaitan dengan pemahaman pada konsep materi yang lain terutama integral. Selain itu, penerapan materi turunan sering kita kita jumpai seperti pada bidang ekonomi, menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi, menentukan kemonotonan fungsi, menentukan limit bentuk tak tentu dan lain-lain.

Pada bab ini mahasiswa diharapkan dapat menguasai konsep dalam kalkulus dasar terutama materi tutunan. Oleh karena itu, tujuan pembelajaran pada bab ini dirumuskan sebagai berikut:

6. Mahasiswa mampu menemukan kembali konsep dasar turunan berdasarkan dari permasalahan garis singgung dan kecepatan sesaat.
7. Mahasiswa mampu memahami notasi turunan .
8. Mahasiswa dapat membedakan penggunaa derivatif dan diferensial.
9. Mahasiswa dapat menggunakan diferensial sebagai suatu aproksimasi.

B. Definisi Turunan

Dasar pemikiran dari turunan (*derivative*) muncul dari dua permasalahan. Menurut Purcell & Varberg (1987) bahwa permasalahan diangkat sebagai pendekatan untuk memahami konsep dasar turunan adalah permasalahan yang berkaitan dengan garis singgung dan kecepatan sesaat. Untuk lebih jelas perhatikan penjelasan berikut.

Misalkan $f(x)$ suatu fungsi, seringkali kita jumpai bahwa fungsi tersebut berguna untuk mengetahui seberapa sensitif perubahan $f(x)$ dari nilai kecil x. Untuk mengetahui apa itu benar, maka Fowler & Snapp (2014) memberikan pandangan sebagai berikut:

1. Jika $p(t)$ mewakili posisi suatu benda terhadap waktu, maka laju perubahannya memberikan kecepatan benda.
2. JIka $v(t)$ mewakili kecepatan suatu benda terhadap waktu, laju perubahannya memberikan percepatan benda.
3. Laju perubahan suatu fungsi dapat membantu kita memperkirakan fungsi yang dengan fungsi sederhana.
4. Lau perubahan suatu fungsi dapat digunakan untuk membantu kita menyelesaikan persamaan yang tidak akan bisa diselesaikan melalui metode lain.

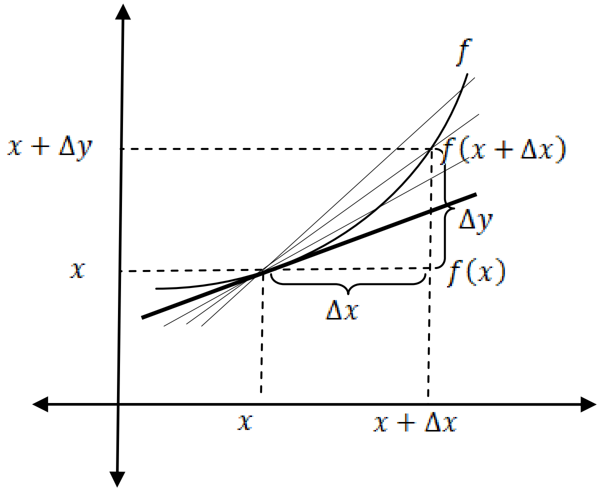
Berdasarkan beberapa pandangan tersebut, maka kita coba melihat konsep turunan sebagai suatu garis singgung dan kecepatan sesaat. Perhatikan penjelasan berikut.

1. Garis Singgung

Laju perubahan suatu fungsi adalah kemiringan garis singgung (Fowler & Snapp, 2014). Untuk saat ini, pertimbangkan definisi informal dari garis singgung berikut:

> “Diberikan fungsi $f(x)$, jika seseorang dapat "memperbesar" pada $f(x)$ secukupnya sehingga $f(x)$ tampak sebagai garis lurus, maka garis itu adalah garis singgung $f(x)$ pada titik yang ditentukan oleh x”.

Berdasarkan Euclides, garis singgung didefinisikan sebagai suatu garis yang memotong kurva pada satu titik. Garis singgung grafik pada suatu titik dapat dihitung dengan melakukan suatu pendekatan garis yang melalui titik tersebut dan titik lain pada grafik yang sama. Perhatikan ilustrasi pada gambar 5.1 berikut.



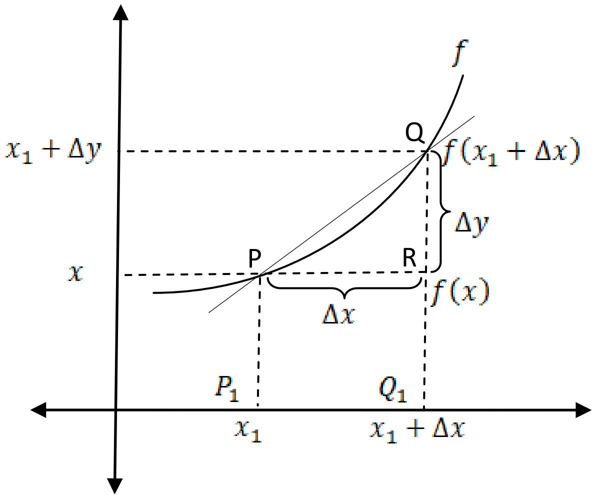
Gambar 5.1

Garis Singgung Dapat Ditemukan Sebagai Batas Dari Garis-Garis Potong

Kita mengilustrasikan definisi informal ini dari gambar 5.1 diatas. Turunan dari fungsi $f(x)$ di x adalah kemiringan garis singgung di x. Dalam mencari kemiringan garis ini, kita anggap garis potong adalah garis yang memotong secara lokal pada dua titik. Kemiringan garis potong yang melewati titik $(x, f(x))$ dan $\big((x + \Delta x), f(x + \Delta x)\big)$ diberikan sebagai berikut:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Pendefinisian diatas mungkin belum cukup membawa pada define formal dari turunan (*derivative*). Perhatikan gambar 5.2 dibawah ini, misalkan pada grafik itu diambil sebarang titik yaitu $P(x_1, y_1)$ dan titik $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ dimana titik Q letaknya sangat dekat dengan titik P. Dari titik P ke titik Q terjadi perubahan nilai yang kecil untuk x_1 yaitu sebesar Δx. Akibatnya, berturut-turut $f(x_1)$ mengalami penambahan sebesar Δy sehingga diperoleh $f(x_1 + \Delta y)$. Perhatikan gambar 5.2 berikut.

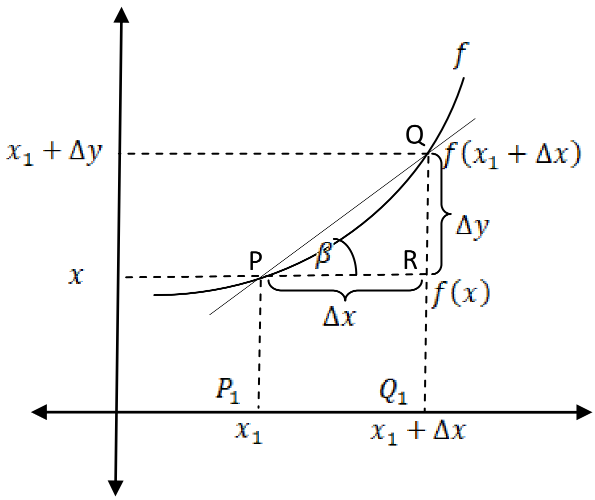


Gambar 5.2. Perubahan nilai kecil dari x

Berdasarkan gambar 5.2, misalkan Q_1 adalah hasil proyeksi dari titik Q pada sumbu X. Selanjutnya, dari titik P dibuat garis yang sejajar dengan sumbu X sehingga $PR = \Delta x$, maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
RQ &= Q_1Q - Q_1R \\
&= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan kurva f dan garis PQ maka dapat ditentukan sebuah sudut yang dibentuk dari perpotongan garis PQ dan PR. Perhatikan gambar 5.3 berikut.

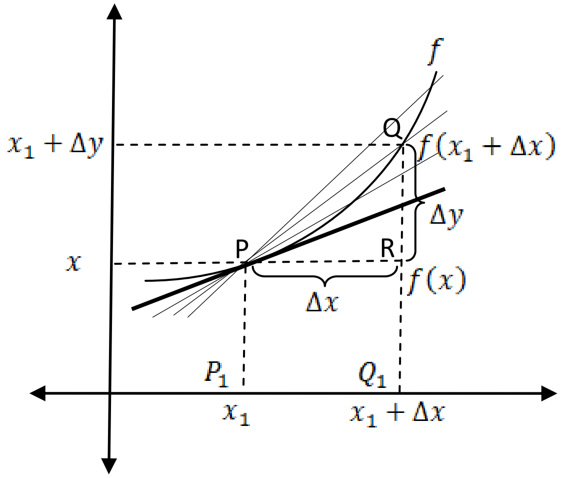


Gambar 5.3
Sudut β yang dibentuk perpotongan garis PQ dan PR

Berdasarkan gambar 5.3, maka dapat diperoleh perbandingan trigonometri yaitu:

$$\tan\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Perhatikan bahwa Δx adalah diferensial (beda) dua nilai x yaitu $x_1 + \Delta x$ dan x_1, selanjutnya disebut diferensial x. Bentuk $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ disebut **hasil bagi diferensial y ke x**.



Gambar 5.4. Titik Q bergerak mendekati titik P

Berdasarkan ilutrasi gambar 5.4, jika titik Q bergerak sepanjang kurva mendekati titik P berarti $\Delta x \to 0$, maka garis potong PQ menjadi garis singgung di titik P pada kurva, sedangkan sudut β menjadi sudut α antara garis singgung di titik P pada kurva dengan sumbu X positif. Jadi diperoleh:

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Apabila limit ini ada, maka $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ disebut derivatif atau turunan dari fungsi f pada titik $x = x_1$, dan biasanya dinyatakan sebagai $y', \frac{dy}{dx}$, atau $f'(x_1)$. Dalam geometri, $f'(x_1)$ menyatakan gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva $y = f(x)$.

Contoh

1. Tentukan kemiringan garis singgung kurva $y = 3x^2 - x$ pada $x = 1$.

   Penyelesaian:
   Garis singgung m diperoleh dengan cara menentukan nilai $f'(x)$ sebagai berikut:

   $$
   \begin{aligned}
   m = f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
   &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)] - [3x^2 x]}{\Delta x} \\
   &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - x - \Delta x] - [3x^2 - x]}{\Delta x} \\
   &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2 - \Delta x}{\Delta x} \\
   &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x - 1)}{\Delta x} \\
   &= \lim_{\Delta x \to 0} 6x + 3\Delta x - 1 \\
   &= 6x - 1
   \end{aligned}
   $$

   Karena garis singgung melalui $x = 1$, maka diperoleh:

   $$
   \begin{aligned}
   m = f'(x) &= 6x - 1 \\
   f'(1) &= 6(1) - 1
   \end{aligned}
   $$

   Jadi, kemiringan garis singgung kurva $y = 3x^2 - x$ pada $x = 1$ adalah $m = 3$.

2. Tentukan persamaan garis singgung dari kurva $y = -x^2 + 2x - 3$ yang melalui titik $P(-1, 3)$.

   Penyelesaian:
   Persamaan garis yang melalui sebuah titik (x_1, y_1) dan gradien m dirumuskan dalam $y - y_1 = m(x - x_1)$. Garis singgung m diperoleh dengan cara menentukan nilai $f'(x)$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
m = f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[-(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)-3]-[-x^2+2x-3]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[-x^2-2x\Delta x-\Delta x^2+2x+2\Delta x-3]-[-x^2+2x-3]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x\Delta x-\Delta x^2+2\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x+1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2x+\Delta x+1 \\
&= 2x+1
\end{aligned}
$$

Karena garis singgung melalui $x = 1$, maka $m = f'(1) = 2(1) + 1 = 3$, sehingga persamaan garis singgung yang melalui $m = 3$ dan titik $P(1,2)$ adalah:

$$
\begin{aligned}
y - 2 &= 3(x-1) \\
y - 2 &= 3x - 3 \\
y &= 3x - 3 + 2 \\
y &= 3x - 1
\end{aligned}
$$

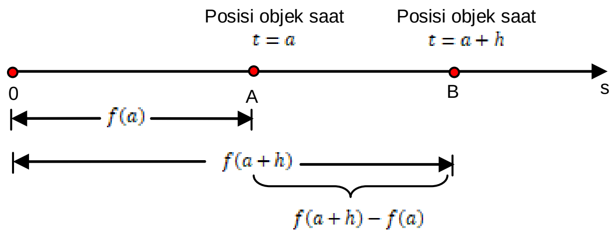
Jadi, persamaan garis singgung yang melaui sebuah titik $P(1,2)$ pada kurva $y = -x^2 + 2x - 3$ adalah $y = 3x - 1$.

2. Kecepatan Sesaat

Masalah lain yang muncul sebagai konsep dasar dari turunan adalah kecepatan sesat. Misalkan suatu kendaraan berpindah dari tempat mula-mula menuju ke tempat lain yang berjarak 90 km dalam waktu 3 jam, maka kecepatan rata-rata kendaraan tersebut adalah 30 km/jam. Ini berarti, kecepatan rata-rata adalah jarak antara posisi mula-mula ke posisi selanjutnya dibagi dengan waktu tempuhnya.

Misalkan terdapat suatu objek yang bergerak sepanjang garis lurus dan memenuhi persamaan $s = f(t)$

dengan s menyatakan jarak yang ditempuh oleh objek dari titik asal sampai waktu t. Perhatikan gambar ilustrasi berikut:



Gambar 5.5. Perpindahan objek

Berdasarkan ilustrasi diatas, maka kecepatan rata-rata dari posisi A ke posisi B dapat ditentukan sebagai $\bar{v}_s = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Jika $h \to 0$ maka kecepatan sesaat dinyatakan sebagai nilai limit dari kecepatan rata-rata yang ditulis $v = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Contoh

1. Tentukan besar kecepatan sesaat dari sebuah objek yang jatuh, beranjak dari posisi diam pada $t = 2{,}7$ detik yang dinyatakan dalam fungsi $f(t) = 16t^2 - 3$.

   Penyelesaian:

   Kita hitung kecepatan pada $t = x$ detik.

$$t' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(16(x+\Delta x)^2 - 3) - (16x^2 - 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{16(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 3 - 16x^2 + 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{16x^2 + 32x\Delta x + 16\Delta x^2 - 16x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(32x+16\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 32x + 16\Delta x$$

$$= 32x$$

Dengan demikian, kecepatan pada $t = 2{,}7$ detik adalah $32(2{,}7) = 86{,}4$ meter/detik.

2. Sebuah partikel bergerak sepanjang garis koordinat yang dirumuskan dalam $s = \sqrt{3t - 2}$ dimana s adalah jarak berarah dalam cm yang diukur dari titik asal ke titik yang dicapai setelah t detik. Hitunglah kecepata partikel pada akhir 2 detik.

   Penyelesaian:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{5(3+\Delta x)+1} - \sqrt{5(3)+1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{16+5\Delta x} - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt{16+5\Delta x} - 4}{\Delta x} . \frac{\sqrt{16+5\Delta x} + 4}{\sqrt{16+5\Delta x} + 4} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{16+5\Delta x - 16}{\Delta x(\sqrt{16+5\Delta x} + 4)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{(\sqrt{16+5\Delta x} + 4)}$$

$$= \frac{5}{8}$$

   Jadi, kecepatan pada akhir 3 detik pertama adalah $\frac{5}{8}$ cm/detik.

Dari pemaparan kedua permasalahan diatas, selanjutnya diberikan definisi turunan sebagai berikut:

Defisini:

Turunan fungsi f adalah fungsi lain dari f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan x adalah

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Contoh

1. Diberikan suatu fungsi $f(x) = 9x - 4$. Tentukan $f'(2)$.

   Penyelesaian:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[9(x+\Delta x) - 4] - [9x - 4]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9x + 9\Delta x - 4 - 9x + 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 9 \\ &= 9 \end{aligned}$$

2. Diberikan suatu fungsi $f(x) = x^3 + 2x$. Tentukan $f'(-1)$.

   Penyelesaian:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left((x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)\right) - (x^3 + 2x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\left(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3\right) + (2x + 2\Delta x)\right] - x^3 - 2x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2\right)}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2)$$
$$= 3x^2 + 2$$
$$f'(-1) = 3(-1)^2 + 2$$
$$= 5$$

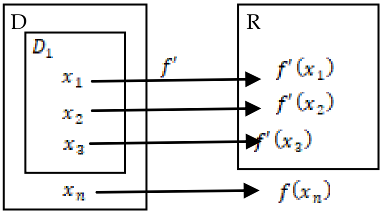
C. Definisi Diferensial

Differensial merupakan istilah lain dari turunan. Apabila $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ada, maka berarti bahwa fungsi tersebut terdiferensialkan di x. Proses mencari turunan disebut sebagai diferensiasi. Apakah *derivative* da diferensial itu sama, marilah kita perhatikan penjelasan berikut.

Misalkan diberikan suatu fungsi f dengan domain D. Apabila x_1 anggota D, maka $f(x_1)$ ada dan tunggal. Jika D_1 himpunan bagian dari D dimana fungsi f mempunyai derivatif, maka:

- ✓ Jika x_1 anggota dari D_1 berarti bahwa $f(x_1)$ ada dan tunggal serta juga $f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ ada dan tunggal.
- ✓ Jika x_2 anggota dari D_1 berarti bahwa $f(x_2)$ ada dan tunggal serta juga $f'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2+\Delta x)-f(x_2)}{\Delta x}$ ada dan tunggal.
- ✓ Jika x_n bukan anggota dari D_1 berarti bahwa $f(x_n)$ ada dan tunggal tetapi $f'(x_n)$ tidak ada atau tidak tunggal.

Penjelasan diatas dapat lebih dipahami dengan menyatakannya dalam sebuah diagram panah. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 5.6. Pemetaan f'

Perhatikan gambar 5.6, untuk setiap anggota D_1 diperoleh nilai f' yang tunggal. Hal ini berarti bahwa kita peroleh fungsi baru yaitu f' dengan domain D_1. Fungsi baru ini disebut fungsi derivatif dari fungsi f. Proses mendapatkan fungsi f' dari fungsi f disebut turunan.

Berdasarkan analogi diatas, fungsi f dikatakan diferensiabel (dapat diturunkan) apabila memenuhi syarat-syarat berikut:

1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ada

   $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ini dikatakan ada apabila hasil limit kiri bernilai sama dengan limit kanan.

2) Domain D_1 dari fungsi f' sama dengan domain D fungsi f $(D = D_1)$.

Dari uraian diatas, agar lebih memahami maka perhatikan teorema dibawah ini.

Jika sebuah kurva mempunyai sebuah garis singgung di sebuah titik, maka kurva itu tidak dapat melompot atau sangat berayun di titik tersebut.

> **Teorema**
>
> Jika $f'(c)$ ada maka f kontinu dititik c.

Bukti:

Karena fungsi f diferensiabel pada $x = c$, berarti $f'(c)$ ada. Kita perlu menunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

$f(x) = f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c), x \neq c$

Karena $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c}\left[f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c)\right]$

$$= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \lim_{x \to c}(x-c)$$

$$= f(c) + f'(c).0$$

$$= f(c)$$

Hal ini berarti bahwa $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, sehingga dapat disimpulkan bahwa fungsi f kontinu pada $x = c$.

Teorema diatas menjelaskan bahwa apabila terdapat suatu fungsi yang mempunyaia turunan di sebuah titik, maka fungsi tersebut kontinu di titik itu. Namun, tidak berlaku sebaliknya karena ada fungsi yang kontinu pada suatu titik tetapi tidak mempunyai derivatif pada titik itu. Jadi kekontinuan suatu fungsi adalah syarat perlu untuk adanya derivatif, namun bukan syarat cukup. Perhatikan contoh-contoh berikut:

Contoh

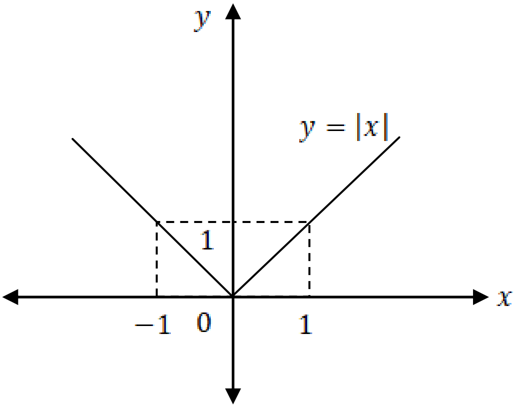
1. Diberikan suatu fungsi f yang dirumuskan sebaga $f(x) = |x|$.
   a. Gambarlah grafik $f(x)$.
   b. Tunjukkan bahwa fungsi f kontinu pada titik $x = 0$.
   c. Tunjukkan bahwa fungsi f terdiferensiabel pada titik $x = 0$.

Penyelesaian:

a. Fungsi $(x) = |x|$ dapat dinaytakan sebagai suatu persamaan $y = |x|$. Karena fungsi tersebut merupakan fungsi nilai mutlak maka dapat dinyatakan sebagai:

$$|x| = \begin{cases} x & untuk\ x \geq 0 \\ -x & untuk\ x < 0 \end{cases}$$

Oleh karena itu, gambar grafiknya merupakan dua garis lurus yang bercabang.



b. Untuk menunjukkan bahwa fungsi f kontinu pada titik $x = 0$, maka perlu ditunjukkan syarat-syarat berikut:

i) $f(a)$ ada

Karena akan ditunjukkan bahwa fungsi f kontinu pada titik $a = 0$, maka nilai

$f(a) = f(0) = |0| = 0$

Jadi, karena $f(0) = 0$ maka berarti $f(a)$ ada.

ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ ada

Untuk menentukan apakah limitnya ada, maka perlu ditunjukkan bahwa $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

- Limit kiri diperoleh: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$
- Limit kanan diperoleh: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$

Karena limit kiri bernilai sama dengan limit kanan maka berarti $\lim_{x \to 0} f(x)$ ada.

iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Berdasarkan syarat (i) dan (ii) diperoleh bahawa $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ dan $f(0) = 0$, maka dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Karena fungsi f memenuhi ketiga syarat diatas, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi f kontinu pada titik $x = 0$.

c. Untuk menunjukkan bahwa fungsi f dapat diturunkan maka perlu memenuhi syarat suatu fungsi terdiferensiabel, yaitu:

i) $f'(x)$ ada

Untuk menunjukkan apakah $f'(x)$ ada, yaitu berlaku bahwa $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, maka dapat dicari sebagai berikut:

- Pada nilai $\Delta x < 0$, maka berlaku sebagai berikut:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-(x+\Delta x) - (-x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x}$$
$$= -1$$

- Pada nilai $\Delta x \geq 0$, maka berlaku:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 1$$

Karena $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ maka dapat disimpulkan bahwa $f'(0)$ tidak ada.

ii) Domain fungsi memenuhi $D = D_1$.

Karena $f'(0)$ tidak ada maka $x = 0$ adalah anggota dari D_1, sehingga $D \neq D_1$.

Berdasarkan penjabaran diatas, yaitu karena $f'(0)$ tidak ada dan $D \neq D_1$, maka disimpulkan bahwa fungsi f tidak terdiferensiabel pada titik $x = 0$.

D. Notasi Turunan

Sejauh kita membahas turunan, kita ketahui bahwa notasi turunan dilambangkan dalam f'. Teryata selain f', turunan dapat dinotasikan dalam bentuk lain. Seperti apa notasi lain dari turunan? Perhatikan penjelasan berikut!!

1. Notasi Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz adalah seorang dari dua penemu utama kalkulus yang menyatakan bahwa $\frac{dy}{dx}$ adalah suatu hasil bagi dua bilangan yang sangat kecil. Notasi $\frac{dy}{dx}$ merupakan lambang baku dari turunan, yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Contoh

Diketahui $y = x^2 - 2$, tentukan nilai $\frac{dy}{dx}$.

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x+\Delta x)^2 - 2) - (x^2 - 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 2 - x^2 + 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

$$= 2x$$

2. Notasi y'

Notasi y' dibaca sebagai turunan dari y. Penggunaan notasi ini sama dengan $f'(x)$ yang mana hal ini mirip dengan ketika kalian ingin menggambarkan suatu grafik $y = f(x)$. Penggunaan notasi ini lebih praktis digunakan. Perhatikan contoh berikut.

Contoh

Diberikan suatu persamaan $y = 3x + 2$, tentukan nilai y' .

Penyelesaian:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) + 2 - (3x+2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3$$

$$= 3$$

3. Notasi D

Notasi D merupakan singkatan dari kata diferensial (Palopo, 2020). Penulisan notasi ini dinyatakan dalam $D_x y$

yang dibaca sebagai "turunan y terhadap x". Perhatikan contoh berikut.

Contoh

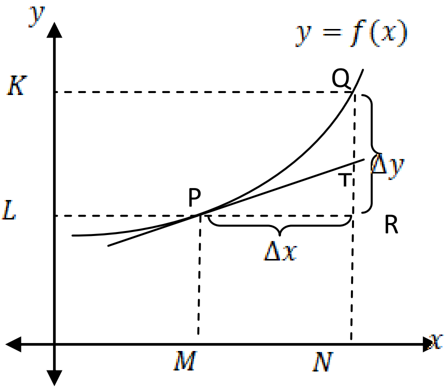
Diketahui bahwa $y = 2x - 1$, maka tentukan $D_x y$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} D_x y &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)-1-(2x-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

E. Aproksimasi

Pada sub topik sebelumnya, telah dibahas tentang notasi Leibniz yaitu $\frac{dy}{dx}$. Notasi $\frac{dy}{dx}$ dapat diartikan sebagai hasil bagi dua diferensiabel. Namun sekarang kita coba pandang $\frac{dy}{dx}$ dalam arti lain. Perhatikan ilustrasi dari gambar berikut:



Gambar 5.7. Arti lain $\frac{dy}{dx}$ diperoleh dari grafik fungsi $y = f(x)$

Berdasarkan gambar 5.7, pada kurva ditentukan dua titik yaitu titik $P(x,y)$ dan $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ yang berdekatan letaknya. Dari hal itu dapat dinyatakan bahwa $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{LK}{MN} = \frac{RQ}{PR} =$ gradien garis singgung PQ dan $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Berdasarkan gradien garis singgung di titik P yang memotong RQ di titik T, maka dapat diperoleh:

$$f'(x) = \frac{RT}{PR} = \frac{RT}{\Delta x} \text{ atau } RT = f'(x).\Delta x$$

Bentuk inilah yang disebut sebagai diferensial y (yang sesuai dengan perubahan Δx pada x) dimana lambangnya ditulis sebagai dy. Akibatnya dapat dinyatakan bawah $dy = f'(x).\Delta x$.

Kita ingin memandang dy untuk mendapatkan arti diferensial yang bersesuaian itu. Oleh karena itu, kita perhatikan fungsi identitas yaitu $f(x) = x$. Dari fungsi identitas tersebut diperoleh:

$$\begin{aligned} dy &= f'(x).\Delta x \\ &= 1.\Delta x \\ &= \Delta x \text{ ...... (i)} \end{aligned}$$

Karena dalam fungsi identitas $y = f(x) = x$, maka dapat dituliskan:

$$dy = d[f(x)] = dx \text{ .... (ii)}$$

Berdasarkan persamaan (i) dan (ii) diperoleh $dx = \Delta x$. Jadi apabila diketahui $y = f(x)$, maka:

$$\boxed{dy = d[f(x)] = f'(x)\,dx}$$

Berdasarkan penjabaran diatas, selanjutnya dijabarkan definisi formal dari diferensial.

Defisini Diferensial

Andaikan $y = f(x)$ terdiferensialkan di x dan andaikan bahwa dx diferensial dari variabel bebas x, menyatakan pertambahan sebarang dari x. Diferensial yang bersesuaian dengan dy dari variabel tak bebas y didefinisikan oleh:

$$dy = f'(x)\,dx$$

Diferensial memerankan juga suatu nilai aproksimasi. Perhatikan gambar 5.7 diatas. Andaikan $y = f(x)$, selanjutnya jika x diberikan tambahan sebesar Δx, maka y juga menerima tambahan yang berpadanan sebesar Δy, yang nilainya dapat dihampiri oleh dy, jadi $f(x + \Delta x)$ diaproksimasi oleh:

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,\Delta x}$$

Contoh

1. Tanpa menggunakan kalkulator, tentukan nilai aproksimasi dari $\sqrt{4{,}6}$ dan $\sqrt{8{,}2}$.

   Penyelesaian:

   Pandang grafik fungsi $y = f(x) = \sqrt{x}$, maka $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

   - Misal $x = 4$ dan $\Delta x = 0{,}6$ maka $f(4) = \sqrt{4} = 2$ dan $f'(x)\,\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{4}}\,.(0{,}6) = 0{,}15$.

     Jadi, diperoleh nilai aproksimasi:

     $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,\Delta x$

     $f\left(\sqrt{4 + 0{,}6}\right) = f\left(\sqrt{4{,}6}\right) = 2 + 0{,}15 = 2{,}15$

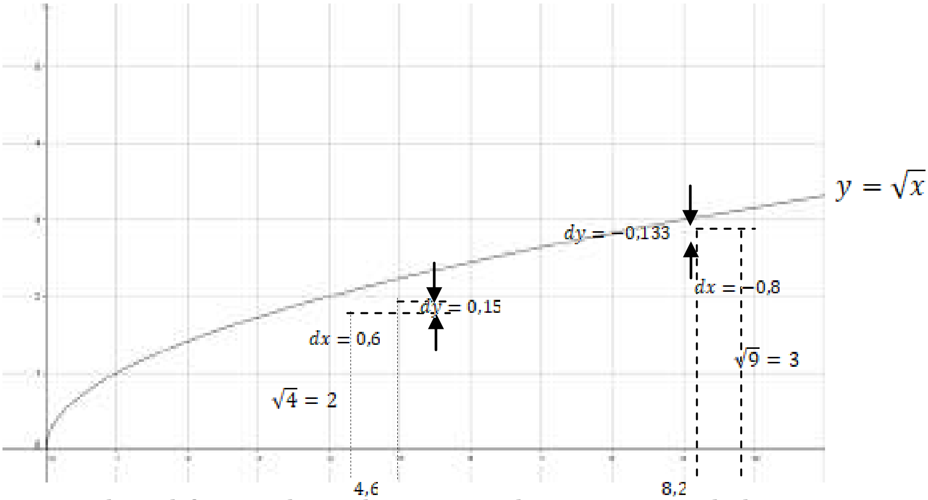
   - Misal $x = 9$ dan $\Delta x = -0{,}8$ maka $f(9) = \sqrt{9} = 3$ dan $f'(x)\,\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{9}}\,.(-0{,}8) = -0{,}133$.

     Jadi, diperoleh nilai aproksimasi:

$f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,\Delta x$

$f\left(\sqrt{9-0{,}8}\right) = f\left(\sqrt{8{,}2}\right) = 3 - 0{,}133 = 2{,}8{,}67$

Nilai aproksimasi $2{,}15$ dan $2{,}8{,}67$ dibandingkan dengan nilai sebenarnya dapat diperhatikan pada grafik berikut:



2. Gunakan diferensial untuk mengaproksimasi pertambahan luas sebuah gelembung sabun pada saat jari-jarinya bertambah dari 3 cm menjadi 3,025 cm.

   Penyelesaian:

   Luas gelembung bola sabun diberikan oleh $A = 4\pi r^2$. Kita boleh mengaproksimasi nilai sebenarnya, ΔA dengan diferensial dA, dimana $dA = 8\pi r$

   Pada $r = 3$ dan $dr = \Delta r = 0{,}025$, sehingga diperoleh:

   $dA = 8\pi(3)(0{,}025) \approx 1{,}885$ cm

F. Rangkuman

1. Turunan fungsi f adalah fungsi lain dari f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan x adalah

   $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, asalkan limitnya ada

2. Andaikan $y = f(x)$ terdiferensialkan di x dan andaikan bahwa dx diferensial dari variabel bebas x, menyatakan pertambahan sebarang dari x. Diferensial yang bersesuaian dengan dy dari variabel tak bebas y didefinisikan oleh $dy = f'(x)\,dx$.
3. Turunan dinotasikan dalam $f'(x), y', \frac{dy}{dx}$ dan $D_x y$.
4. Diferensial memerankan juga suatu nilai aproksimasi yang nilainya dapat dihitung deng $f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,\Delta x$.

G. Evaluasi

Agar kalian dapat lebih memahami bab ini, maka cobalah mengerjakan soal berikut dengan tepat!

1. Tentukan persamaan garis singgung di titik $P(-1, -1)$ pada kurva $y = x^3$.
2. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $R(0, -1)$ pada kurva $y = \frac{2}{x-2}$.
3. Sebuah benda menjelajahi garis sehingga posisi s nya adalah $s = 2t^2 + 2$ setelah t detik.
   a. Berapa kecepatan rata-rata pada selang $2 \leq t \leq 3$?
   b. Tentukan kecepatan rata-rata pada $t = 2$.
4. Jika sebuah partikel bergerak sepanjang garis koordinat sehingga jarak berarah dari titik asal ke titik setelah t detik adalah $-t^2 + 4t$ meter. Kapan partikel akan berhenti (yaitu, bilamana kecepatannya menjadi nol)?
5. Diketahui $g(x) = |2x - 2| + x$.
   a. Selidikilah apakah $g(x)$ kontinu pada $x = 1$.
   b. Selidikilah apakah $g(x)$ difrensiabel pada $x = 1$.

c. Gambarlah grafik $g(x)$.

6. Fungsi f ditentukan oleh $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x<0) \\ -x+1 & (x \geq 0) \end{cases}$.

   a. Selidikilah apakah $f(x)$ kontinu pada $x = 0$.

   b. Selidikilah apakah $g(x)$ difrensiabel pada $x = 0$.

7. Tanpa menggunakan kalkulator, tentukan nilai aproksimasi dari $\sqrt{35,9}$

8. Aproksimasi nilai volume material dalam tempurung bola yang jari-jari dalamnya 5 cm dan jari-jari luarnya 5,125 cm.

*****

BAB 6
ATURAN PENCARIAN TURUNAN

A. Pendahuluan

Pada bab ini membahas tentang aturan pencarian turunan. Materi ini merupakan salah satu bagian penting dalam turunan. Aturan pencarian turunan digunakan untuk menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan turunan. Penggunaan aturan pencarian turunan lebih praktis karena tidak perlu menjabarkan proses mencari turunan seperti bab sebelummya yaitu menggunakan penjabaran sesuai definisi turunan.

Tujuan mempelajari materi ini adalah agar mahasiswa dapat membuktikan teorema dalam aturan pencarian turunan dan menggunakannya dalam menyelesaikan soal yang berkiatan dengan turunan. Agar lebih jelas maka perhatikan pemaparan berikut ini.

B. Aturan Pencarian Turunan Fungsi Aljabar

Dalam menentukan turunan suatu fungsi dapat dinyatakan dalam notasi Leibniz yaitu $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Proses pencarian turunan suatu fungsi langsung dari definisi turunan yakni dengan menyusun hasil bagi selisih

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

dan menghitung limitnya, membutuhkan waktu yang lama dan membosankan. Oleh karena itu untuk memperpendek proses tersebut maka digunakan teorema-

teorema dalam aturan pencarian turunan yang dijelaskan sebagai berikut:

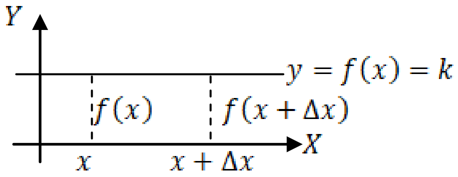
1. Aturan Kostanta

Fungsi konstanta $f(x) = k$ jika digambarkan dalam sebuah grafik maka akan menujukkan sebuah garis lurus sehingga kemiringannya adalah nol. KOnsep inilah yang dapat digunakan untuk memahami teorema aturan fungsi konstanta.

> **<u>Teorema 6.1</u>: Aturan Fungsi Konstanta**
>
> Jika $f(x) = k$, dengan k suatu konstanta maka untuk sebarang x berlaku $f'(x) = 0$.

Bukti:

Grafik fungsi $f(x) = k$ sejajar sumbu X. Perhatikan gambar dibawah ini!



Gambar 6.1. Grafik fungsi konstan

Karena $f(x) = k$, maka $f(x + \Delta x) = k$, jadi diperoleh:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k-k}{\Delta x}$$

$$= 0$$

Jadi $f'(x) = 0$

2. Aturan Fungsi Identitas

Grafik fungsi $f(x) = x$ merupakan grafik yang berupa garis lurus dengan kemiringannya adalah satu, sehingga dari inilah kita dapar menduga bahwa turunan dari fungsi ini adalah satu.

Teorema 6.2: Aturan Fungsi Identitas

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$.

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}$$
$$= 1$$

Jadi, $f'(x)\, dx = 1$

3. Aturan Kelipatan Konstanta

Teorema 6.3: Aturan Kelipatan Konstanta

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka $(kf)'(x) = k.f'(x)$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k.f(x+\Delta x) - k.f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} k.\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= k.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= k.f'(x)$$

Contoh

Tentukan turunan fungsi dari $f(x) = 2x$

Penyelesaian:

Misalkan $f(x) = x$ dan k = 2, maka turunan dari fungsi tersebut adalah:

Karena $f'^{(x)} = 1$ maka $f'^{(x)} = k.f'(x)$

$$f'^{(x)} = 2.1$$

$$f'^{(x)} = 2$$

4. Aturan Pangkat

<u>Teorema 6.4</u>: Aturan Pangkat

Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan-bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$.

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n\right] - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + nx\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}\right]}{\Delta x}$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Contoh

Tentukan turunan fungsi dari $f(x) = x^4$

Penyelesaian:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f'(x) = 4x^{4-1}$$

$f'(x) = 4x^3$

5. Aturan Jumlah

Teorema 6.5: Aturan Jumlah

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Bukti:

$$(f+g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

Contoh

Tentukan turunan dari $h(x) = x^3 + 2x^2$

Penyelesaian:

Fungsi dari $h(x)$ merupakan penjumlahan dua fungsi misalnya dari $f(x) = x^3$ dan $g(x) = 2x^2$, maka turunan dari $h(x)$ adalah:

$$(h)'(x) = (f+g)'(x)$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

$$= 3x^{3-1} + 2.2x^{2-1}$$

$$= 3x^2 + 4x$$

6. Aturan Selisih

Teorema 6.6: **Aturan Selisih**

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Bukti:

$$(f-g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - g(x+\Delta x)] - [f(x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x) - g'(x)$$

Contoh

Tentukan turunan fungsi dari $x^4 - 4x^2$

Penyelesaian:

$(f+g)'(x) = (x^4 - 4x^2)' = 4x^3 - 8x$

Misal $f(x) = x^4$ dan $g(x) = 4x^2$, maka diperoleh:

$f'(x) = 4x^{4-1}$, $\quad g(x)' = 2 \,.\, 4x^{2-1}$

$f'(x) = 4x^3$, $\quad g'(x) = 8x$

Jadi, $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 4x^3 - 8x$

7. Aturan Hasil Kali

Teorema 6.7: **Aturan Hasil Kali**

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f \cdot g)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$.

Bukti:

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x)] - [f(x) \cdot g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x) + f(x+\Delta x) g(x) - f(x+\Delta x) g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

Contoh

Tentukan turunan dari $(x^2 + 2)(2x)$!

Penyelesaian:

Misal, $f(x) = (x^2 + 2),\ g(x) = (2x)$

Maka $f'(x) = 2x^2,\ g'(x) = 2$

Jadi, $g(x)f'(x) + f(x)g'(x) = (2x)(2x) + (x^2 + 2)(2)$

$$= 4x^2 + 2x^2 + 4$$

$$= 6x^2 + 4$$

8. Aturan Hasil Bagi

<u>Teorema 6.8</u>: Aturan Hasil Bagi

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Bukti:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}\right] - \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x) f(x+\Delta x) - f(x) g(x+\Delta x) - f(x) g(x) + f(x) g(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x+\Delta x) g(x)} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \left[g(x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \cdot \frac{1}{g(x+\Delta x) g(x)} \right\}$$

$$= \left[g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x) g(x)}$$

$$= \frac{g(x) f'(x) - 9(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Contoh

Tentukan turunan dari $h(x) = \frac{2x^2+5}{x}, x \neq 0$

Penyelesaian:

Misal $f(x) = 2x^2 + 5$ dan $g(x) = x$ maka diperoleh:

$f'(x) = 4x$ dan $g'(x) = 1$

Jadi, $h'(x) = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$

$$= \frac{(x)(4x) - (2x^2+5)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{4x^2 - (2x^2+5)}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2+5}{x^2}$$

Setelah membuktikan teorema diatas, selanjutnya kita coba menerapkannya dalam menyelesaikan soal berikut dengan menyatkan turunan menggunakan notasi Leibniz $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Contoh

Tentukan turunan fungsi yang dinyatakan dalam persamaan berikut:

1. $y = 3x + 1$

   Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(3x)}{dx} + \frac{d(1)}{dx}$$
$$= 3\frac{d(x)}{dx} + \frac{d(1)}{dx}$$
$$= 3 + 0$$
$$= 3$$

2. $y = -7x^3 - 5x$

   Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(-7x^3)}{dx} - \frac{d(5x)}{dx}$$
$$= -7\frac{d(x^3)}{dx} - 5\frac{d(x)}{dx}$$
$$= -7(3x^2) - 5$$
$$= -21x^2 - 5$$

3. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}$

   Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{dx} + \frac{d(2\sqrt{x})}{dx} - \frac{d(\frac{3}{x^2})}{dx}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d(x^2)}{dx} + 2\frac{d(\sqrt{x})}{dx} - 3\frac{d(\frac{1}{x^2})}{dx}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d(x^2)}{dx} + 2\frac{d(x^{1/2})}{dx} - 3\frac{d(x^{-2})}{dx}$$
$$= \frac{1}{2}2x + 2.\frac{1}{2}x^{-1/2} - 3(-2)x^{-3}$$
$$= x + x^{-1/2} + 6x^{-3}$$
$$= x + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3}$$

4. $y = (x-1)\sqrt{x}$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\,\frac{d(x-1)}{dx} + (x-1)\,\frac{d\left(x^{1/2}\right)}{dx}$$

$$= \sqrt{x} + (x-1)\frac{1}{2}\left(x^{-1/2}\right)$$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)$$

5. $y = \frac{2x-1}{2x+1}$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x+1)\frac{d(2x-1)}{dx} - (2x-1)\frac{d(2x+1)}{dx}}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{(2x+1)2-(2x-1)2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{4x+2-4x+2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{4}{(2x+1)^2}$$

Terdapat juga beberapa teorema-teorema atau rumus-rumus diferensial suatu fungsi yang berkaitan dengan bentuk eksponen dan logaritma, yaitu sebaga berikut:

Teorema 6.9:

Jika $f(x) = \ln x$ fungsi yang terdiferensialkan maka $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{(x+\Delta x)}{x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

Misalkan $n = \frac{x}{\Delta x}$, maka $n \to \infty$ jika $\Delta x \to 0$, sehingga diperoleh:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]$$

$$= \frac{1}{x} \ln e$$

$$= \frac{1}{x}$$

Teorema 6.10:

Jika $f(x) = a^x$ fungsi yang terdiferensialkan maka $f'(x) = a^x \ln a$ atau $dy = a^x \ln a \, dx$.

Bukti:

Dalam membuktikan teorema ini, akan lebih mudah apabila turunan fungsinya dinyatakan dalam notasi Leibniz $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Misalkan $y = a^x$ maka $\ln y = \ln a^x$, dan apabila kedua ruas didiferensialkan diperoleh:

$$d(\ln y) = d(\ln a^x)$$

$$d(\ln y) = d(x \ln a)$$

$$\frac{1}{y} dy = \ln a \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y . \ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x . \ln a$$

Contoh

Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari persamaan grafik fungsi berikut:

1. $y = x + 2 \ln x$

   Penyelesaian:

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x)}{dx} + \frac{d(2 \ln x)}{dx}$$
   $$= \frac{dx}{dx} + 2\frac{d(\ln x)}{dx}$$
   $$= 1 + \frac{2}{x}$$

2. $y = x^3 + 3^x$

   Penyelesaian:

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(3^x)}{dx}$$
   $$= 3x^2 + 3^x \ln 3$$

C. Turunan Fungsi Trigonometri

Pertanyaan-pertanyaan tentang roda yang berputar dan kecepatan titik padanya secara tak terelakkan menuju ke pengkajian sinus dan kosinus beserta turunan-turunannya. Adapun turunan fungsi sinus dan kosinus dijabarkan sebagai berikut:

Teorema 6.11:

Fungsi-fungsi $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ keduanya didiferensialkan, maka $f'(x) = \cos x$ dan $g'(x) = -\sin x$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}\,(x+\Delta x+x).\sin\ \frac{1}{2}(x+\Delta x-x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}\,(2x+\Delta x).\sin\ \frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right).\sin\ \frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x} \times \frac{1/2}{1/2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right)\frac{\sin\ \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\ \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

$$= \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x$$

Jadi turunan dari $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \cos x$.

Bukti:

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x(\cos \Delta x - 1) - \sin x \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos x \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos x \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \cos x\,(0) - \sin x\,(1)$$

$$= -\sin x$$

Jadi turunan dari $f(x) = \cos x$ adalah $f'(x) = -\sin x$.

<u>Teorema 6.12</u>:

fungsi $f(x) = \tan x$ terdiferensialkan, maka $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Bukti:

Misalkan $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, maka:

$$f'(x) = \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx}$$

$$= \frac{\cos x . d(\sin x) - \sin x . d(\cos x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x . \cos x - \sin x . (-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

<u>Teorema 6.13</u>:

fungsi $f(x) = \operatorname{cosec} x$ terdiferensialkan, maka

$f'(x) = \frac{cotan\, x}{\sin x}$

Untuk membuktikan turunan dari $f(x) = \operatorname{cosec} x$ dapat menggunakan teorema hasil bagi dengan cara mengubah $f(x)$ terlebih dahulu menjadi $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Untuk pembuktiannya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

<u>Teorema 6.14</u>:

fungsi $f(x) = \sec x$ terdiferensialkan, maka $f'(x) = \frac{\tan x}{\cos x}$

Untuk membuktikan turunan dari $f(x) = \sec x$ dapat menggunakan teorema hasil bagi dengan cara mengubah $f(x)$ terlebih dahulu menjadi $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. Untuk pembuktiannya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Teorema 6.15:
fungsi $f(x) = \cot\text{an}\, x$ terdiferensialkan, maka $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Bukti:

Misalkan $\cot\text{an}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$, maka:

$$f'(x) = \frac{d\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{dx}$$

$$= \frac{\sin x . d(\cos x) - \cos x . d(\sin x)}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{\sin x . (-\sin x) - \cos x . \cos x}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Teorema 6.16:

fungsi $f(x) = \text{acrsin}\, x$ dan $g(x) = \text{acrcos}\, x$ masing-masing terdiferensialkan, maka $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dan $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Bukti:

Misalkan $y = \text{acrsin}\, x \rightarrow x = \sin y$, selanjutnya apabila kedua ruas didiferensialkan diperoleh:

$$x = \sin y$$

$$d(x) = d(\sin y)$$

$$dx = \cos y \, dy$$

$$dy = \frac{1}{\cos y} dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Selanjutnya menurut rumus $\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi$, diperoleh:

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} + \frac{d(\arccos x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{dx}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{d(\arccos x)}{dx} = 0$$

$$\frac{d(\arccos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

<u>Teorema 6.17</u>:

fungsi $f(x) = \arctan x$ dan $g(x) = \text{acrcotan } x$ masing-masing terdiferensialkan, maka $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ dan $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Bukti:

Misalkan $y = \text{acrtan } x \rightarrow x = \tan y$, selanjutnya apabila kedua ruas didiferensialkan diperoleh:

$$x = \tan y$$

$$d(x) = d(\tan y)$$

$$dx = \frac{1}{\cos^2 y} dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Untuk teroema $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, silahkan dibuktikan sendiri oleh pembaca sebagai latihan.

Contoh

Tentukan turunan fungsi trigonometri berikut:

1. $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$

   Penyelesaian:

   $$f'(x) = 3\,\frac{d(\sin x)}{dx} + 2\,\frac{d(\cos x)}{dx}$$
   $$= 3\cos x + 2\,(-\sin x)$$
   $$= 3\cos x - 2\,\sin x$$

2. $f(x) = 6\sin x\cos x$

   Penyelesaian:

   $$f'(x) = \cos x\,\frac{d(6\sin x)}{dx} + 6\sin x\,\frac{d(\cos x)}{dx}$$
   $$= \cos x\cos x + 6\sin x\,(-\sin x)$$
   $$= \cos^2 x - 6\sin^2 x$$

3. $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$

   Penyelesaian:

   $$f'(x) = \frac{\sin x\frac{d(1-\cos x)}{dx} - (1-\cos x)\frac{d(\sin x)}{dx}}{\sin^2 x}$$
   $$= \frac{\sin x(\sin x) - (1-\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$$
   $$= \frac{\sin^2 x - \left(\cos x - \cos^2 x\right)}{\sin^2 x}$$
   $$= \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

4. $f(x) = 2\arcsin x - \frac{1}{4}x^2$

   Penyelesaian:

   $$f'(x) = 2\,\frac{d(\arcsin x)}{dx} - \frac{1}{4}\frac{d(x^2)}{dx}$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4}.2x$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}x$$

5. $f(x) = x^2 \operatorname{arccotan} x + \frac{\cos x}{2x^3}$

Penyelesaian:

$$f'(x) = \operatorname{arccotan} x\frac{d(x^2)}{dx} + x^2 d(\operatorname{arccotan} x) + \frac{2x^3\frac{d(\cos x)}{dx} - \cos x\frac{d(2x^3)}{dx}}{(2x^3)^2}$$

$$= \operatorname{arccotan} x\,.\,2x + x^2.\left(-\frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{2x^3(-\sin x) - \cos x\left(6x^2\right)}{4x^6}$$

$$= 2x \operatorname{arccotan} x - \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{2x^3 \sin x + 6x^2 \cos x}{4x^6}$$

$$= 2x \operatorname{arccotan} x - \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{x \sin x + 3\cos x}{2x^4}$$

D. Rangkuman

1. Aturan pencarian turunan fungsi aljabar meliputi:
   a. Jika $f(x) = k$ maka berlaku $f'(x) = 0$.
   b. Jika $f(x) = x$ maka $f'(x) = 1$.
   c. Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka $(kf)'(x) = k.f'(x)$.
   d. Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan-bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$.
   e. Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

f. Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.

g. Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f \cdot g)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$.

h. Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

i. Jika $f(x) = \ln x$ maka $f'(x) = \frac{1}{x}$.

j. Jika $f(x) = a^x$ maka $f'(x) = a^x \ln a$ atau $dy = a^x \ln a\, dx$.

2. Aturan pencarian turunan fungsi trigonometri meliputi:

a. Jika $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ maka $f'(x) = \cos x$ dan $g'(x) = -\sin x$.

b. Jika $f(x) = \tan x$ maka $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

c. Jika $f(x) = \operatorname{cosec} x$maka $f'(x) = -\frac{cotan\ x}{\sin x}$.

d. Jika $f(x) = \sec x$ terdiferensialkan, maka $f'(x) = \frac{\tan x}{\cos x}$.

e. Jika$f(x) = \operatorname{cotan} x$ maka $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

f. Jika $f(x) = \operatorname{acrsin} x$ dan $g(x) = \operatorname{acrcos} x$ maka $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dan $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

g. Jika $f(x) = \arctan x$ dan $g(x) = \operatorname{acrcotan} x$ maka $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ dan $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

E. Evaluasi

Tentukan turunan fungsi-fungsi aljabar berikut:

1. $f(x) = \frac{2}{3x} - \frac{2}{3}$

6. $f(x) = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$

2. $f(x) = \frac{1}{2x} + 2x$

3. $f(x) = \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

4. $f(x) = \frac{x}{2} + 2\sqrt{x}$

5. $f(x) = (2x + 1)^2$

7. $f(x) = (3x^2 + 2x)(x^4 - 3x + 1)$

8. $f(x) = \frac{1}{4x^2 - 3x + 9}$

9. $f(x) = \frac{5x - 4}{3x^2 + 1}$

10. $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}\ln x + x^2 2^x$

Tentukan turunan fungsi-fungsi trigonometri berikut:

1. $f(x) = 3\sin x - 5\cos x$

2. $f(x) = 2\sin x \cos x$

3. $f(x) = x^2 \tan x$

4. $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

5. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x \sin x}$

6. $f(x) = \frac{1}{4}\sec x + 2x^3$

7. $f(x) = (x^2 - x)(1 + \sin x)$

8. $f(x) = 2x \arccos x + \frac{1}{2}x^4$

9. $f(x) = \frac{x - 4}{\text{arccotan } x}$

10. $f(x) = \frac{2}{\arcsin x} - \frac{\sin x}{x^2 + 3}$

*****

BAB 7
ATURAN RANTAI

A. Pendahuluan

Bab akhir dalam buku ini membahas tentang aturan rantai serta turunan tingkat tinggi. Materi aturan rantai ini berkaitan denengan materi yang telah dipelajari pada bab sebelumnya yaitu tentang aturan pencarian turunan. Materi tersebut menjadi dasar dalam mempalajari bab aturan rantai dan turunan tingkat tinggi.

Materi aturan rantai ini sangat berguna bagi mahasiswa karena dapat mempersingkat proses penyelesaian masalah turunan yang lebih kompleks. Oleh karena itu, dalam bab ini dirumuskan tuuan pembelajaran pada materi aturan rantai dan turunan tingkat tiggi antara lain:

1. Mahasiswa mampu menerapkan aturan rantai dalam pemecahan masalah.
2. Mahasiswa mampu memahami turunan tingkat tinggi.
3. Mahasiswa dapat menggunakan aturan rantai dalam menyelesaikan soal turunan yang lebih kompleks.

B. Aturan Rantai

Materi aturan rantai digunakan untuk menyelsaikan soal-soal turunan yang lebih kompleks. Seperti apa aturan arantai itu? Agar lebih jelas perhatikan analogi berikut ini.

Bayangkan usaha untuk menentukan turunan dari $f(x) = (x^2 + 3x - 4)^{30}$. Pertama kita harus mengalikan 30 faktor-faktor kuadrat $x^2 + 3x - 4$ dan kemudian mendiferensialkan polinom berderajat 60 yang dihasilkan.

Langkah tersebut sangat tidak efektif dan membutuhkan waktu yang lama, sehingga untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dapat diterapkan suatu aturan rantai.

1. Notasi D_x

   Agar lebih memahami aturan rantai terlebih dahulu kita pahami notasi D_x. Jika suatu masalah menyangkut lebih dari satu variabel, maka akan sangat membantu apabila terdapat penulisan (notasi) yang menunjukkan variabel mana yang sedang ditinjau. Misalnya, $y = 2x^3$ dan kita ingin memperlakukan x sebagai variabel bebas dan 2 sebagai konstanta, maka dengan menulis $D_x y$ akan diperoleh:

   $$D_x y = D_x(2x^3) = 2D_x(x^3) = 2.3x^2$$

   Lambang $D_x y$ ini dapat dibaca sebagai "*turunan y terhadap x*".

2. Pendiferensialan Fungsi komposit

   Misalkan Tina dapat mengetik dua kali lebih cepat daripada Mona sedangkan Mona dapat mengetik tiga kali lebih cepat daripada Dono maka Tina dapat mengetik $2 \times 3 = 6$ kali lebih cepat daripada Dono. Kedua laju tersebut dikalikan.

   Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, menentukan fungsi komposit $y = f(g(x))$. Karena suatu turunan menunjukkan laju perubahan, kita dapat mengatakan bahwa:

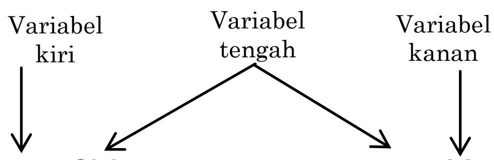
   a. y berubah $D_u y$ kali secepat u
   b. x berubah $D_x u$ kali secepat x

   Sehingga dapat disimpulkan bahwa y berubah $D_u y . D_x u$ kali secepat x. Analogi ini menunjukkan cara kerja aturan rantai. Perhatikan terome dari aturan rantai berikut:

<u>Teorema Aturan Rantai</u>

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposit $y = f(g(x))$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$, maka $f \circ g$ terdiferensialkan di x dan $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Teorema aturan rantai tersebut seperti terlihat lebih rumit. Oleh karena itu, agar lebih bisa dipahami, maka perhatikan analogi pada gambar 7.1 Berikut.



$$y = f(u) \qquad\qquad u = g(x)$$

$$\begin{pmatrix}\text{turunan}\\ \text{variabel}\\ \text{kiri}\\ \text{terhadap}\\ \text{variabel}\\ \text{kanan}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{turunan}\\ \text{variabel}\\ \text{kiri}\\ \text{terhadap}\\ \text{variabel}\\ \text{tengah}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{turunan}\\ \text{variabel}\\ \text{tengah}\\ \text{terhadap}\\ \text{variabel}\\ \text{kanan}\end{pmatrix}$$

Gambar 7.1. Analogi penerapan aturan rantai

Aturan rantai digunakan $D_x y = D_u y \, D_x u$ untuk menyelesaikan turunan fungsi komposit. Namun, dalam menurunkan fungsi-fungsi di dalamnya tersebut tidak terlepas dari konsep aturan turunan pada materi sebelumnya. Perhatikan contoh soal berikut!

Contoh

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut:

1. $f(x) = (x^2 + 3x - 4)^{30}$

   Penyelesaian:

   Misalkan $y = u^{30}$ dan $u = x^2 + 3x - 4$

$$D_x y = D_u y . D_x u$$
$$= D_u\left(u^{30}\right) D_x(x^2 + 3x - 4)$$
$$= (30u^{29}).(2x + 3)$$
$$= 30(x^2 + 3x - 4)^{29}.(2x + 3)$$

2. $f(x) = \frac{1}{(2x^5 - 7)^3}$

Penyelesaian:

Misalkan $y = \frac{1}{u^3} = u^{-3}$ dan $u = 2x^5 - 7$

$$D_x y = D_u y . D_x u$$
$$= D_u(u^{-3}).D_x(2x^5 - 7)$$
$$= (-3u^{-4})(10x^4)$$
$$= \frac{-30x^4}{u^4}$$
$$= \frac{-30x^4}{(2x^5 - 7)^4}$$

Perhatikan pembahasn tentag notasi turunan pada bab sebelumnya. Berdasarkan notasi Leibniz menyatakan bahwa $\frac{dy}{dx}$ sebagai lambang operator mempunyai arti yang sama dengan D_x. Dalam penggunakaan aturan rantai pada soal, akan lebih mudah jika dinyatakan menggunakan notaso Leibniz. Aturan rantai dalam notasi Leibniz mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}}$$

Contoh

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut:

1. $y = \cos(3x + 1)$

Penyelesaian:

Misalkan $y = \cos u$ dan $u = 3x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d(\cos u)}{du} \cdot \frac{d(3x+1)}{dx}$$

$$= -\sin u \,.\, 3$$

$$= -3\sin(3x + 1)$$

2. $y = \sec^2(4x + 3)$

Penyelesaian:

Misalkan $y = u^{-2}, u = \cos v$ dan $v = 4x + 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{d(u^{-2})}{du} \cdot \frac{d(\cos v)}{dv} \cdot \frac{d(4x+3)}{dx}$$

$$= (-2u^{-3})(-\sin v)(4)$$

$$= 8(\cos v)^{-3}.\sin v$$

$$= 8(\cos(4x + 3))^{-3}.\sin(4x + 3)$$

$$= \frac{8\sin(4x+3)}{\cos^3(4x+3)}$$

3. Tentukan turunan $y = \ln\ (2x + 1)$

Penyelesaian:

Misalkan $y = \ln u$ dan $u = 2x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d(\ln u)}{du} \cdot \frac{d(2x+1)}{dx}$$

$$= \left(\frac{1}{u}\right)(2)$$

$$= \frac{2}{2x+1}$$

4. Tentukan dy jika diketahui:

a. $y = \ln^2(1 - x^3)$

b. $y = \ln_2(1 - x^3)$

Penyelesaian:

a. $y = \ln^2(1 - x^3) = [\ln(1 - x^3)]^2$

Misalkan $y = u^2, u = \ln v$ dan $v = 1 - x^3$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$dy = \frac{d(u^2)}{du} \cdot \frac{d(\ln v)}{dv} \cdot \frac{d(1-x^3)}{dx} dx$$

$$dy = (2u)\left(\frac{1}{v}\right)(-3x^2)\ dx$$

$$dy = (2\ln v)\left(\frac{1}{v}\right)(-3x^2)\ dx$$

$$dy = (2\ln(1 - x^3))\left(\frac{1}{(1-x^3)}\right)(-3x^2)\ dx$$

$$dy = \frac{-6x^2\ln(1-x^3)}{(1-x^3)}\ dx$$

b. $y = \ln_2(1 - x^3) = \ln\ln(1 - x^3)$

Misalkan $y = \ln u, u = \ln v$ dan $v = 1 - x^3$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$dy = \frac{d(\ln u)}{du} \cdot \frac{d(\ln v)}{dv} \cdot \frac{d(1-x^3)}{dx} dx$$

$$dy = \left(\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{v}\right)(-3x^2)\ dx$$

$$dy = \left(\frac{1}{\ln v}\right)\left(\frac{1}{v}\right)(-3x^2)\ dx$$

$$dy = \left(\frac{1}{\ln(1-x^3)}\right)\left(\frac{1}{(1-x^3)}\right)(-3x^2)\ dx$$

$$dy = \frac{-3x^2}{(1-x^3).\ln(1-x^3)}\ dx$$

5. Tentukan turunan dari $y = {}^2\log(2x^2 + x)$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut maka terlebih dahulu kita ubah menjadi bentuk logaritma dengan basis e sebagai berikut:

$y = {}^{2}\log(2x^2 + x) = \frac{{}^{e}\log\,(2x^2+x)}{{}^{e}\log 2} = \frac{\ln\,(2x^2+x)}{\ln 2}$ maka

misalkan $y = \frac{1}{\ln 2}\ln\, u$ dan $u = 2x^2 + x$ diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d\left(\frac{1}{\ln 2}\ln\, u\right)}{du}\cdot\frac{d(2x^2+x)}{dx}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\frac{d(\ln\, u)}{du}\cdot\frac{d(2x^2+x)}{dx}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{u}\right).(4x + 1)$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2x^2+x}\right).(4x + 1)$$

$$= \frac{4x+1}{(2x^2+x)\ln 2}$$

6. Diketahui $y = \frac{\ln^2 4x}{x}$, tentukan akar-akar persamaan $\frac{dy}{dx} = 0$.

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d(\ln^2 4x)}{dx} - \ln^2 4x\frac{d(x)}{dx}}{x^2}$$

$$= \frac{x\left((2\;\ln 4x).\left(\frac{1}{4x}\right).(4)\right) - \ln^2 4x(1)}{x^2}$$

$$= \frac{x\left(\frac{2}{x}\;\ln 4x\right) - \ln^2 4x}{x^2}$$

$$= \frac{2\ln 4x - \ln^2 4x}{x^2}$$

Karena $\frac{dy}{dx} = 0$ maka $\frac{2\ln 4x - \ln^2 4x}{x^2} = 0$.

$$\frac{2\ln 4x - \ln^2 4x}{x^2} = 0$$

$2\ln 4x - \ln^2 4x = 0$

$\ln 4x\,(2 - \ln 4x) = 0$

$\ln 4x = 0$ atau $2 - \ln 4x = 0$

$\ln 4x = \ln 1 \qquad\quad -\ln 4x = -2$

$4x = 1 \qquad\qquad \ln 4x = 2$

$x = \frac{1}{4} \qquad\qquad \ln 4x = \ln e^2$

$4x = e^2 \qquad\qquad x = \frac{1}{4}e^2$

Jadi akar-akar persamaan $\frac{dy}{dx} = 0$ adalah $x = \frac{1}{4}$ dan $x = \frac{1}{4}e^2$.

7. Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = x^3.3^x$.

   Penyelesaian:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 3^x\frac{d(x^3)}{dx} + x^3\frac{d(3^x)}{dx}$$
$$= 3^x(3x^2) + x^3(3^x \ln 3)$$
$$= 3^x(3x^2 + x^3 \ln 3)$$
$$= 3^x x^2(3 + x \ln 3)$$

8. Tentukan turunan fungsi $f(x) = x^x$.

   Penyelesaian:

   Cara I:

$$y = x^x$$
$$\ln y = \ln x^x$$
$$\ln y = x \ln x$$
$$d(\ln y) = [\ln x\,(d(x)) + x(d(\ln x))]dx$$
$$\frac{1}{y}dy = \left[\ln x\,(1) + x\left(\frac{1}{x}\right)\right]dx$$
$$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1)$$
$$\frac{dy}{dx} = x^x(\ln x + 1)$$
$$f'(x) = x^x(\ln x + 1)$$

   Cara II:

   Setiap bilangan a dapat ditulis sebagai $a = e^{\ln a}$ (karena $a = e^{\ln a}$ dapat dibuah ke dalam bentuk logaritma dengan basis e), sehingga diperoleh:

$y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ maka misalkan $y = e^u$ dan $u = x \ln x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d(e^u)}{du} \cdot \frac{d(x \ln x)}{dx}$$

$$= (e^u \ln e) . \left[\ln x . \frac{d(x)}{dx} + x \frac{d(\ln x)}{dx}\right]$$

$$= (e^u \ln e) . \left[\ln x . (1) + x \left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= (e^u . 1) . (\ln x + 1)$$

$$= e^{x \ln x} . (\ln x + 1)$$

$$= x^x (\ln x + 1)$$

C. Turunan Tingkat Tinggi

Jika $f(x)$ persamaan suatu fungsi yang diferensiabel, maka derivatif pertama fungsi f dinyatakan dengan $\frac{dy}{dx}$, y', atau $f'(x)$ yang pada umumnya juga merupakan sebuah fungsi $f(x)$. Jika derivatif pertama itu diefernsiabel, maka derivatifnya disebut derivatif kedua dari fungsi f, dan dinyatakan dengan $\frac{d^2 y}{d^2 x}$, y'', atau $f''(x)$. Selanjutnya derivatif dari derivatif kedua disebut derivatif ketiga dari fungsi f, dan dinyatakan dengan $\frac{d^3 y}{d^3 y}$, y''', atau $f'''(x)$. Derivatif ke-n dinyatakan dengan $\frac{d^n y}{d^n y}$, $y^{(n)}$, atau $f^{(n)}(x)$.

Derivatif tingkat tinggi digunakan pada banyak persoalan, misalnya dalam penyelidikan tentang nilai ekstrim suatu fungsi, titik belok suatu kurva, percepatan sebuah partikel yang bergerak, kelengkungan suatu kurva dan sebagainya yang akan dibahas pada bab berikutnya.

Perhatikan contoh-contoh berikut ini!

Contoh

1. Jika diketahui $y = \cos\sqrt{x}$, tentukan nilai $4x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y$.

Penyelesaian:

$y = \cos\sqrt{x}$ maka $dy = d(\cos\sqrt{x})$

$$= -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\cos\sqrt{x}.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).2\sqrt{x} - 2\frac{1}{2\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})}{\left(2\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{-\cos\sqrt{x} + \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{4x}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}}$$

$4x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 4x\left[\frac{-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}}\right] + 2\left[-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right] +$
$\cos\sqrt{x}$

$$= \left[\frac{-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right] + \left[-\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right] + \cos\sqrt{x}$$

$$= 0$$

Jadi nilai dari $4x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$.

2. Jika diketahui $f(x) = 2x - (4x^2 + 1)\arctan 2x$, maka tentukan nilai dari $f^3(0)$.

Penyelesaian:

Dari fungsi $f(x) = 2x - (4x^2 + 1)\arctan 2x$ diperoleh:

$$f'(x) = 2 - \left[8x\arctan 2x + \frac{2}{1+(2x)^2}(4x^2 + 1)\right]$$

$$= 2 - \left[8x\arctan 2x + \frac{2}{1+4x^2}(4x^2 + 1)\right]$$

$$= 2 - [8x \arctan 2x + 2]$$
$$= -8x \arctan 2x$$
$$f''(x) = -8 \arctan 2x + \frac{2}{1+(2x)^2}(-8x)$$
$$= -8 \arctan 2x - \frac{16x}{1+4x^2}$$
$$f'''(x) = -8\ \frac{2}{1+4x^2} - \left[\frac{16(1+4x^2)-8x(16x)}{(1+4x^2)^2}\right]$$
$$= \ -\frac{16}{1+4x^2} - \left[\frac{16+64x^2-128x^2}{(1+4x^2)^2}\right]$$
$$= \ -\frac{16(1+4x^2)-16+64x^2}{(1+4x^2)^2}$$
$$= \frac{-32}{(1+4x^2)^2}$$
$$f'''(0) = \frac{-32}{(1+4(0)^2)^2} = -32$$

D. Rangkuman

1. Aturan rantai didefinikan yaitu Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposit $y = f(g(x))$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$, maka $f \circ g$ terdiferensialkan di x dan $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.
2. Aturan rantai dalam notasi Leibniz mempunyai bentuk $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$.
3. Derivatif ke-n dinyatakan dengan $\frac{d^n y}{d^n y}$, $y^{(n)}$, atau $f^{(n)}(x)$.

E. Evaluasi

Kerjakan soal berikut dengan tepat!!

1. Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut:

   a. $y = (x^2 + 4)^2(2x^3 - 1)^3$

   g. $y = \ln^2(x^2)$

b. $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$

c. $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

d. $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$

e. $y = \sin^3 2x$

f. $y = \cos\ (4x^5 - 11x)$

h. $y = \ln 2x - \arcsin x$

i. $y = 2^x + \frac{1}{2}x^2$

k. $y = x^{2^x}$

l. $y = x^3 e^{-x}$

m. $y = x^{\arctan x}$

2. Tentukan persamaan garis singgung di titik $P(1,0)$ pada kurva $y = x\ln(2x^2 - 1)$.
3. Jika $f(x) = x \sin x$, tentukan $f''(x)$.
4. Jika $f(x) = x^2 e^x$, tunjukkan bahwa $f^3(x) = e^x(x^2 + 6x + 6)$.
5. Tunjukkan bahwa $y = e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)$ memenuhi persamaan $y'' + 4y' + 8y = 0$.

*****

DAFTAR PUSTAKA

Dwiyogo, W. (2018). *Pembelajaran Berbasis Blended Learning*. Depok: Rajawali Pers.

Elliott, M. (2002). *Blended Learning:The Magic Is In The Mix. In A. R e-learning handbook (pp. 58-63)*. New York: McGraw-Hill.

Fowler, J. & Snapp, B. (2014). *Calculus*. USA: Department of Mathematics, University of the Aegean.

Graham, C.R. (2004). *Handbook of blended learning: Global Perspectives, local designs*. San Francisco: Pfeiffer-An Imprint of Wiley.

Husamah (2014). *Pembelajaran Bauran (Blended Learning)*. Jakarta: Prestasi Pustaka Raya.

Istiningsih, S. & Hasbullah. (2015). Blended Learning, Trend Strategi Pembelajaran Masa Depan. *Jurnal Elemen, Vol.1, No.1, Hal. 49-56*

Moesone, D. (1988). *Kalkulus 1*. Surabaya: Unesa University Press.

Palopo, M. (2020). *Kalkulus Differensial Pendekatan Blended Learning*. Yogyakarta: Deepublish.

Purcell, E.J. & Varberg, D. (1987). *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1 Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.

Waryanto, N.H. (2006). On-line Learning sebagai Salah Satu Inovasi Pembelajaran. *Jurnal Pythagoras, Vol.2, No.1, Hal. 10-23*.

TENTANG PENULIS

Sari Saraswati, M.Pd., adalah seorang Dosen di Universitas Hasyim Asy'ari Tebuireng. Penulis memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Matematika pada tahun 2011 di STKIP PGRI Jombang dan menyelesaikan Magister Pendidikan Matematika Program BiMPoME melalui beasiswa RME-DIKTI di Universitas Sriwijaya tahun 2015.

Sejak tahun 2015, penulis mendedikasikan dirinya sebagai dosen pada Universitas Hasyim Asy'ari Tebuireng hingga saat ini. Penulis fokus menekuni bidang *Realistics Mathematics Education* (RME) dan pendidikan matematika.

Prestasi yang pernah dicapai adalah memenangkan hibah penelitian dosen pemula pada tahun 2017, 2018 dan 2020. Hingga saat ini, penulis masih aktif dalam berbagai penelitian serta penulisan artikel dan buku.

*****

Iesyah Rodliyah, M. Pd., lahir di Gresik pada tanggal 03 Juli 1990, menyelesaikan studi Matematika Murni yang ditempuh selama 7 semester dengan beasiswa berprestasi setiap tahunnya di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2012 dan Magister Pendidikan Matematika di Unversitas Negeri Surabaya pada tahun 2014. Pada tahun 2012 menjadi tenaga pengajar matematika dan Pembina olimpiade Sains dan Matematika tingkat SD dan SMP di beberapa sekolah swasta.

Mulai mengembangkan profesinya sebagai Dosen tetap pada Program Studi S1 Pendidikan Matematika di Universitas Hasyim Asy'ari sejak tahun 2014 sampai sekarang. Aktif menulis buku, buku pertamanya merupakan buku Antologi bersama penulis *best seller* Ahmad Rifa'i Rif'an dengan judul "*Hope* Masih Ada Hari Esok", buku kedua berjudul 'Strategi *Experiential Learning* Berbasis Karakter (Teori dan Praktik) aktif menulis artikel ilmiah terkait dunia pendidikan khususnya pendidikan matematika, serta aktif dalam berbagai penelitian bidang Pendidikan dan Matematika. Bisa dihubungi melalui *email* iesyahrodliyah90@gmail.com