Teori Belajar MATEMATIKA

Dr. Siti Faizah, M.Pd.
Novia Dwi Rahmawati, S.Si., M.Pd.
Nihayatus Sa'adah, M.Pd.

PT. INDONESIA EMAS GROUP

TEORI BELAJAR MATEMATIKA

TEORI BELAJAR MATEMATIKA

Dr. Siti Faizah, M.Pd.
Novia Dwi Rahmawati, S.Si., M.Pd.
Nihayatus Sa'adah, M.Pd.

PT. INDONESIA EMAS GROUP

TEORI BELAJAR MATEMATIKA

© Penerbit PT. Indonesia Emas Group

Penulis:
Dr. Siti Faizah, M.Pd.
Novia Dwi Rahmawati, S.Si., M.Pd.
Nihayatus Sa'adah, M.Pd.

Editor:
Chamdan Mashuri, S,Kom,. M.Kom.
Iesyah Rodliyah, S.Si., M.Pd

Cetakan Pertama: September 2022

Cover: Rusli

Tata Letak: Penerbit PT. Indonesia Emas Group

Hak Cipta 2022, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

PENERBIT PT. INDONESIA EMAS GROUP
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT

Jalan Pasir Putih No. 16 Kelurahan Mekarjaya, Kecamatan Rancasari
Kota Bandung – 085223186009

E-mail: indonesiaemasgroup5758@gmail.com

Copyright © 2022 by Penerbit PT. Indonesia Emas Group
All Right Reserved

- Cet. I – : Penerbit PT. Indonesia Emas Group, 2022
; 14,8 x 21 cm
ISBN: 978-623-99731-4-8

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga buku ini bisa terselesaikan. Shalawat serta salam tetap terlimpahkan kepada Nabi Muhammad saw yang telah memberikan teladan yang baik bagi kita semua.

Penulis bersyukur bisa menyelesaikan buku yang berjudul Teori Pembelajaran Matematika. Buku ini ditulis guna memenuhi kebutuhan mahasiswa dan dosen pada mata kuliah teori belajar. Buku ini memuat penemu teori-teori belajar, serta implementasinya dalam suatu pembelajaran matematika. Dengan mempelajari buku ini secara tekun dan tuntas diharapkan mahasiswa dapat memperoleh pengetahuan tentang teori-teori yang dapat digunakan dalam suatu pembelajaran.

Pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya Rektor Universitas Hasyim Asy'ari, Kepala Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat (LPPM), Dekan Fakultas Ilmu Pendidikan (FIP), dan Kepala Program Studi (Kaprodi) Pendidikan Matematika yang telah mengizinkan kami untuk menulis buku ini.

Buku ini telah dicermati dan ditelaah secara teliti, akan tetapi masih belum sempurna. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan saran dan kritik dari para pembaca demi perbaikan buku ini di masa yang akan datang. Penulis berdo'a semoga buku ini bermanfaat sebagai amal jariah yang diterima oleh Allah SWT dan selalu memberikan manfaat bagi para pembaca.

Jombang, September 2022

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1
PENDAHULUAN

Keberhasilan proses pembelajaran di kelas salah satunya ditentukan dari kemampuan guru dalam memilih teori-teori belajar yang ia terapkan di dalam kelas. Teori-teori tersebut memiliki pandangan yang berbeda-beda mengenai apa itu belajar, bagaimana seseorang ketika belajar, dan perubahan apa yang dialami seseorang setelah belajar. Dalam buku ini, disajikan beberapa jenis teori belajar yaitu: teori belajar behavioristik, teori perkembangan kognitif, teori belajar sosiokultural, teori Pemrosesan Informasi, teori APOS, dan teori Tiga Dunia Matematika. Dalam buku juga dijelaskan tentang keterkaitan teori pembelajaran dengan struktur argumen dalam matematika.

Teori belajar behavioristik menitikberatkan pada perubahan tingkah laku yang dapat diamati secara langsung sebagai hasil dari proses pembelajaran. Proses belajar terjadi karena adanya interaksi antara stimulus yang diberikan dan respon sebagai bentuk pengalaman. Beberapa tokoh yang menganut teori behavioristik adalah Edward Thorndike, Ivan Petrovich Pavlov, John B. Watson, Edward Guthrie, dan Burrhus Frederic Skinner.

Teori belajar kognitif muncul karena beberapa ahli tidak sependapat dengan teori behavioristik yang berorientasi pada hasil belajar. Menurut para pakar teori belajar kognitif, proses belajar seharusnya lebih dititikberatkan karena belajar tidak hanya melibatkan stimulus dan respon saja tetapi juga ada proses mental yang cukup kompleks di dalamnya. Beberapa tokoh yang menganut teori kognitif adalah Jean Piaget, Jerome Bruner, dan David Ausuble.

Berbeda lagi dengan teori sosiokultural. Teori ini meyakini bahwa belajar merupakan hasil interaksi sosial untuk memecahkan suatu permasalahan. Seseorang dikatakan belajar jika dia dapat menyelesaikan tugas yang dia belum kuasai benar dengan bantuan orang lain. Dalam konteks pembelajaran di sekolah, proses belajar terjadi saat siswa berinteraksi dengan teman atau guru untuk menyelesaikan hal-hal di luar kemampuan belajar mandiri mereka. Salah satu tokoh yang mencetuskan teori ini adalah Lev Vygotsky.

Teori Pemrosesan Informasi merupakan perkembangan dari teori kognitif. Teori ini mempercayai bahwa belajar merupakan serangkaian proses pengolahan informasi. Informasi yang diterima seseorang dipilah menjadi dua kategori, informasi yang penting dan tidak penting. Informasi yang penting disimpan di memori otak jangka pendek sedangkan informasi yang tidak penting dilupakan. Informasi di memori jangka pendek jika digunakan secara terus menerus selanjutnya dipindahkan ke memori otak jangka panjang.

Teori APOS dikembangkan dari teori konstrukstivis dari Piaget dan dikhususkan dalam pengetahuan matematika. Teori ini mengemukakan bahwa seseorang mengonstruksi konsep matematika melalui empat tahap yaitu Aksi, Proses, Obyek, dan Skema. Menurut teori ini, seorang siswa belajar matematika dimulai dari adanya aksi mental terhadap konsep matematika. Selanjutnya, aksi tersebut diinternalisasi sebagai proses dan proses dienkapsulai ke dalam suatu obyek. Terakhir, obyek tersebut dikaitkan dengan pengetahuan lain dalam sebuah skema.

Teori Tiga Dunia Matematika diprakarsai oleh David Tall. Teori ini membagi pengetahuan matematika dalam tiga dunia yaitu perwujudan-konseptual (*conceptual-embodied*), simbolis-proseptual (*proceptual-symbolic*), dan formal-aksiomatik. Masing-masing dunia terjadi secara langsung untuk meningkatkan argumen deduktif.

Setiap proses pembelajaran menuntut siswa untuk mampu menyampaikan pemahamannya terkait materi yang sedang dipelajarinya melalui argumen. Argumen merupakan alat yang digunakan untuk menggali lebih dalam tentang sebuah keputusan yang terjadi secara rasional dalam menyusun pembuktian secara formal. Analisis terhadap argumen dalam pembelajaran dapat dilakukan dengan menggunakan tiga cara yaitu (1) *Socioscientific arguments,* (2) *Argument* Walton, dan (3) *Argument* Toulmin.

Dalam mata kuliah Aljabar Linier Elementer, mahasiswa dituntut untuk mampu melakukan pembuktian secara formal berdasarkan stuktur argumen yang valid. Buku ini mengkaji tentang analisis struktur argumen mahasiswa dalam menyelesaikan masalah pembuktian matematika berdasarkan proses berpikir matematis. Analisis yang digunakan terhadap argumen dalam pembuktian aljabar adalah model Toulmin, sedangkan analisis yang digunakan terhadap proses berpikir mahasiswa yaitu teori tiga dunia matematika dan teori tentang proses kognitif dalam membuktikan proposisi matematika.
Disajikan tiga paparan argumen mahasiswa dalam materi invers matriks, analisis argumen dalam pembuktian

matematika tidak hanya dilihat dari hasil tes tertulis mahasiswa saja, tetapi juga perlu dilakukan eksplorasi terhadap aktivitas mental mahasiswa ketika menguraikan setiap langkah pembuktian. Tiga mahasiswa yang dipaparkan di buku ini merupakan mahasiswa dengan kemampuan matematika yang berbeda-beda yaitu kemampuan tinggi, sedang, dan rendah.

BAB 2
TEORI BEHAVIORISTIK

Teori belajar Behavioristik dicetuskan oleh Gagne & Berliner tentang perubahan tingkah laku sebagai hasil dari pengalaman karena pengalaman dapat diamati secara langsung, tidak seperti proses mental. Ahli Psikolog mengatakan bahwa proses mental dapat didefinisikan sebagai pikiran dan perasaan yang dialami seorang individu dan tidak dapat dilihat secara langsung oleh orang lain. Menurut teori Behavioristik, pikiran dan perasaan bukanlah obyek yang tepat dalam suatu pembelajaran karena semua itu tidak bisa dilihat atau diamati secara langsung dalam proses pembelajaran.

Teori ini berkembang menjadi aliran Psikolog belajar yang mempunyai pengaruh terhadap arah pengembangan teori dan praktek pembelajaran yang dikenal dengan aliran behavioristik. Teori ini menekankan pada terbentuknya perilaku yang tampak sebagai hasil belajar. Seseorang dapat dikatakan telah belajar jika dia dapat menunjukkan perubahan tingkah laku yang terjadi secara langsung (Putrayasa, 2013).

Belajar dapat terjadi karena adanya interaksi antara stimulus dan respon (Slavin, 2000). Hal terpenting dari belajar adalah input yang berupa stimulus dan output yang berupa respon. Stimulus dapat diartikan sebagai segala sesuatu yang diberikan guru kepada pembelajar (siswa), sedangkan respon adalah reaksi atau tanggapan siswa terhadap stimulus yang diberikan guru. Pada teori ini mengutamakan adanya pengukuran dari stimulus dan respon karena hal ini dapat digunakan untuk mengetahui adanya perubahan atau tidak setelah dilakukan proses pembelajaran. Faktor lain yang dianggap penting dari teori Behavioristik adalah adanya faktor penguatan atau *reinforcement*. Jika penguatan yang diberikan ditambah, maka responnya akan semakin kuat. Begitu pula sebaliknya, jika penguatannya dikurangi atau dihilangkan, maka responnya semakin sedikit.

Adapun tokoh-tokoh pada teori Behavioristik adalah sebagai berikut:

1. Edward Thorndike (1874 – 1949)

   Thorndike menyatakan bahwa belajar adalah proses interaksi antara stimulus dan respon. Stimulus adalah suatu tindakan yang dapat merangsang terjadinya kegiatan belajar seperti pikiran, perasaan, atau hal-hal lain yang bisa ditangkap melalui alat indra. Sedangkan respon adalah reaksi yang dimunculkan oleh peserta didik pada saat proses pembelajaran, bisa berupa pikiran, perasaan, atau tindakan.

   Oleh karena itu, tingkah laku yang muncul akibat kegiatan pembelajaran dapat berwujud konkrit maupun tidak konkrit. Meskipun aliran behavioristik sangat mengutamakan pengukuran, tetapi aliran ini tidak dapat menjelaskan bagaimana cara mengukur tingkah laku yang tidak dapat diamati. Slavin (2000) menyebutkan bahwa teori Thorndike adalah teori koneksionisme. Thorndike menyebutkan bahwa terdapat tiga hokum belajar yang utama, yakni (1) hukum efek, (2) hukum latihan, dan (3) hukum kesiapan. Ketiga hokum ini menjelaskan tentang bagaimana suatu aktivitas dapat memperkuat respon.

2. Ivan Petrovich Pavlov (1849 – 1936)
   Pavlov lahir pada tanggal 14 September 1894 di Ryazan Rusia. Desa tersebut adalah tempat ayahnya yang bernama Dmitrievich Pavlov menjadi pendeta. Pavlov dididik di sekolah gereja dan melanjutkan ke Seminari Teologi. Pavlov lulus sebagai sarjana kedokteran dengan bidang dasar fisiologi. Pada tahun 1884 beliau menjadi direktur departemen fisiologi pada institute of experimental medicine dan memulai penelitian mengenai fisiologi pencernaan. Pavlov meraih penghargaan nobel pada bidang Physiology or medicine pada tahun 1904. Karyanya mengenai pengkondisian sangat mempengarhui psikologi behavioristik di Amerika.

   Eksperimen-eksperimen yang dilakukan Pavlov dan ahli lain tampaknya sangat terpengaruh pandangan behaviorisme, dimana gejala kejiwaan seseorang dilihat dari perilakunya. Sesuatu hal yang paling sentral dalam hidup manusia bukan hanya pikiran, peranan maupun bicara, melainkan tingkah lakunya. Pikiran tentang tugas atau rencana baru akan memperoleh arti jika seseorang berbuat sesuatu.

3. John B. Watson (1878 – 1958)
   Watson mendefinisikan belajar sebagai proses interaksi antara stimulus dan respon, namun stimulus dan respon yang dimaksud harus dapat diamati dan dapat diukur. Jadi, meskipun dia mengakui adanya perubahan-perubahan mental dalam diri seseorang selama proses berlajar, namun dia menganggap faktor tersebut sebagai hal yang tidak perlu diperhitungkan karena tidak dapat diamati. Watson merupakan seorang behavioris murni,

karena kajiannya tentang belajar disejajarkan dengan ilmu-ilmu lain, seperti ilmu eksak karena berorientasi pada suatu obyek yang dapat diamati dan diukur. Menurut Watson, belajar sebagai proses interaksi antara stimulus dan respons, stimulus dan respons yang dimaksud harus dapat diamati dan dapat diukur (Putrayasa, 2013).

4. Edwin Guthrie (1886 – 1959)
   Azas belajar Guthrie yang utama adalah hukum kontiguiti, yakni gabungan stimulus-stumulus yang disertai dengan suatu gerakan. Guthrie juga menggunakan variable hubungan stimulus dan respon untuk menjelaskan terjadinya proses belajar. Belajar dapat terjadi karena gerakan terakhir yang dilakukan untuk mengubah situasi stimulus, sedangkan respon yang lain tidak terjadi. Penguatan terhadap stimulus hanya sekedar melindungi hasil belajar yang baru agar tidak hilang dengan cara mencegah perolehan respon yang baru. Hubungan antara stimulus dan respon bersifat bersifat sementara, oleh karena itu dalam kegiatan belajar mengajar peserta didik perlu sesering mungkin diberi stimulus agar hubungan stimulus dan respon bersifat lebih kuat. Guthrie juga berpendapat bahwa hukuman (*punishment*) mempunyai peranan penting dalam proses belajar. Hukuman yang diberikan pada saat proses pembelajaran mempunyai peranan yang penting karena untuk mengubah tingkah laku peserta didik.

5. Burrhus Frederic Skinner (1904 – 1990)
   Konsep-konsep yang dikemukakan oleh Skinner tentang belajar lebih mendominasi daripada konsep para tokoh sebelumnya. Skinner mampu memberikan penjelasan

tentang konsep belajar secara sederhana tetapi lebih komprehensif. Menurut Skinner hubungan antara stimulus dan respon yang terjadi melalui interaksi dengan lingkungannya, yang kemudian menimbulkan perubahan tingkah laku, tidaklah sesederhana yang dikemukakan oleh tokoh-tokoh sebelumnya. Menurut Skinner respon yang diterima seseorang tidak sesederhana itu, karena stimulus-stimulus yang diberikan akan saling berinteraksi untuk mempengaruhi respon yang dihasilkan. Respons yang diberikan ini memiliki konsekuensi-konsekuensi. Konsekuensi-konsekuensi tersesbut nantinya mempengaruhi munculnya perilaku (Slavin, 2000).

Teori belajar behavioristik menekankan pada terbentuknya perilaku yang tampak sebagai hasil belajar. Teori ini mendudukkan orang yang belajar sebagai individu yang pasif karena hanya memprioritaskan pada stimulus dan respon. Aplikasi teori belajar Behavioristik dalam kegiatan pembelajaran memfokuskan pada empat hal, yakni (a) tujuan pembelajaran, (b) sifat materi pelajaran, (c) karakteristik pembelajar, dan (d) media serta fasilitas pembelajaran yang tersedia. Proses pembelajaran yang berpijak pada teori behavioristik memandang bahwa suatu pengetahuan bersifat obyektif, pasti, tetap, dan tidak berubah. Pada teori ini, pengetahuan telah terstruktur dengan rapi sehingga belajar adalah perolehan pengetahuan, sedangkan mengajar adalah memindahkan pengetahuan (*transfer of knowledge*) ke orang yang belajar atau pembelajar. Fungsi pikiran adalah untuk merekam struktur pengetahuan yang sudah ada melalui proses berpikir yang dapat dianalisis dan dipilih, sehingga makna yang dihasilkan dari proses berpikir dapat berupa karakteristik dari struktur pengetahuan.

Teori belajar behavioristik dapat digunakan untuk mengetahui perubahan tingkah laku peserta didik sebagai hasil dari proses belajar yang dilakukan karena adanya stimulus dan respon. Perubahan tingkah laku peserta didik hanya dapat diamati ketika peserta didik melakukan pembelajaran terkait materi sikap, karakter, dan kepribadian saja, tetapi juga pada pembelajaran matematika. Misalnya, guru memberikan stimulus kepada peserta didik tentang operasi aljabar yang berbentuk "selesaikan bentuk persamaan dari $7x - 2x + 4x = \cdots$". Peserta didik yang belum pernah menerima materi tentang operasi aljabar akan merasa kebingungan untuk menyelesaikan bentuk soal seperti itu, tetapi setalah mendapat penjelasan dari guru maka peserta dapat memberikan respon yang berupa $7x - 2x + 4x = 9x$.

Peserta didik dikatakan mengalami perubahan tingkah laku setelah mempelajari materi operasi aljabar, pada saat mereka memahami dan bisa mengoperasikan suatu variabel, koefisien, dan konstanta. Jika peserta belum bisa memberikan memberikan respon, maka meraka dapat dikatakan belum mengalami perubahan tingkah dari adanya pembelajaran matematika terkait materi operasi aljabar.

BAB 3
TEORI PERKEMBANGAN KOGNITIF

Istilah kognitif sering sekali dikaitkan dengan berpikir. Kata "kognitif" berasal dari "*Cogitare*" yang berarti berpikir. Dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) kognitif berarti segala sesuatu yang berhubungan atau melibatkan kognisi, atau juga berdasarkan pengetahuan faktual yang empiris. Secara psikologi, kognitif mencakup semua bentuk pengenalan yang meliputi perilaku manusia, pengolahan informasi, pemecahan masalah, memperkirakan, dan berpikir.

Dalam teori kognitif disebutkan bahwa tingkah laku seseorang ditentukan oleh persepsi dan pemahamannya tentang situasi yang berhubungan dengan tujuan. Perubahan tingkah laku seseorang sangat dipengaruhi oleh proses belajar dan berpikir internal yang terjadi selama proses pembelajaran. Berpikir dapat diartikan menggunakan akal budi untuk mempertimbangkan dan memutuskan sesuatu atau mempertimbangkan dalam ingatan. Kata "memikirkan" merupakan kata kerja yang berarti mencari upaya untuk menyelesaikan sesuatu dengan menggunakan akal budi. Berpikir juga sering diartikan sebagai aktivitas mental yang terjadi di dalam otak untuk mengingat, memahami, mencari atau membuat cara, menganalisis, mensintesis masalah dalam rangka menyelesaikannya. Berpikir terjadi di dalam otak sehingga tidak bisa dilihat, tetapi luaran (*output*) dari berpikir bisa dilihat dalam bentuk proses atau langkah-langkah dalam memecahkan suatu masalah (Subanji, 2011).

Teori belajar kognitif muncul karena beberapa ahli belum merasa puas dengan penemuan-penemuan dari para ahli sebelumnya seperti teori behavioristik yang menekankan pada hubungan stimulus dan respon karena tingkah laku seseorang dipengaruhi oleh pikirannya. Teori belajar kognitif merupakan teori belajar yang lebih mementingkan proses belajar daripada hasil belajar. Teori kognitif pada awalnya dikemukakan oleh John Dewey kemudian dilanjutkan oleh Jean Piaget, Jerome Bruner, David Ausubel. Bagi penganut teori kognitif, belajar tidak hanya sekedar melibatkan hubungan stimulus dan respon saja, tetapi juga melibatkan proses berpikir yang sangat kompleks. Belajar juga melibatkan prinsip-prinsip dasar psikologi yang berupa belajar aktif, belajar lewat interaksi sosial dan lewat pengalaman sendiri (Sutarto, 2017).

Adapun tokoh-tokoh dalam teori belajar kognitif adalah:

1. Jean Piaget (1896 – 1980)

   Piaget lahir di Swiss yang meraih gelar doktor pada usia 21 tahun dan berhasil menulis buku lebih dari tiga puluh judul buku yang bertema perkembangan anak dan kognitif (Syah, 2010). Jean Piaget mengungkapkan bahwa setiap individu dapat membentuk pengetahuannya secara terus menerus melalui interaksi dengan lingkungannya (Dimyati & Muljiono, 2006). Terdapat empat tahap perkembangan kognitif menurut Piaget, antara lain:

   a. Tahap sensorimotor (usia 0-2 tahun)

      Seorang individu mulai belajar dan mengendalikan lingkungannya melalui kemampuan panca indra dan gerakannya. Anak dapat memahami tentang sesuatu dengan cara mengkoordinasikan pengalaman-pengalaman sensoris-nya, seperti melihat dan mendengar atau melalui tindakan motorik fisik. Pada tahap ini anak memiliki dunianya berdasarkan pengamatan atau gerakan yang dilakukan oleh orang di sekitarnya (Santrock, 2004).

b. Tahap pra-operasional (usia 2-7 tahun)
   Individu mulai mampu berpikir sebelum bertindak tetapi kemampuan berpikirnya belum sampai pada tingkat berpikir logis. Pada tahap ini juga anak mulai melukiskan dunianya melalui tingkah laku dan kata-kata, tetapi belum mampu melakukan operasi melalui tindakan mental yang direalisasikan melalui tindakan mental terhadap apa yang dilakukan sebelumnya secara fisik. Pada tahap ini juga anak mulai memiliki kecakapan motorik untuk melakukan sesuatu dari apa yang dilihat dan didengar, tetapi belum mampu memahami secara mental (Santrock, 2004).

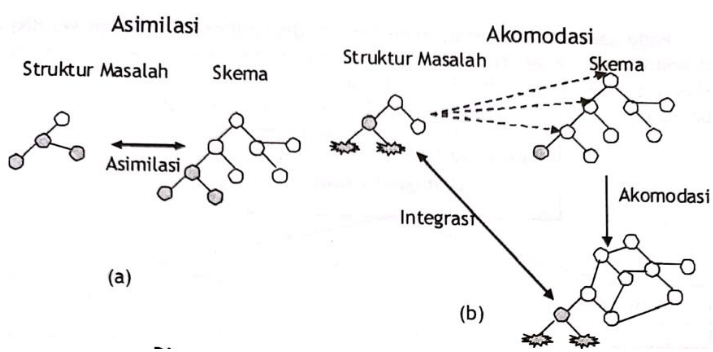
c. Tahap operasional konkrit (7-11 tahun)
   Tahap ini anak-anak muali bisa berpikir secara logis tentang suatu kejadian yang bersifat konkrit, sehingga anak belum bisa berpikir secara abstrak (Ahmadi dkk, 2005). Pada tahap ini anak memiliki kemampuan konservasi *(concept of conservancy)*, yang berarti bahwa suatu benda dapat berubah bentuk tetapi masa dan volumenya tetap. Anak juga mampu melakukan observasi, menilai dan mengevaluasi. Pada tahap ini dapat dikatakan bahwa anak belum bisa menyelesaikan soal matematika yang bersifat abstrak atau dengan menggunakan bahasa simbol.

d. Tahap operasional formal (11 tahun keatas)
   Kemampuan individu pada tahap ini memasuki dunia "kemungkinan" dari dunia sebenarnya. Individu mampu mengajukan hipotesa, menghitung konsekuensi yang mungkin terjadi (Slavin, 2011). Individu mampu memformulasikan semua kemungkinan dan menentukan kemungkinan yang terjadi berdasarkan kemampuan berpikir analitis dan logis. Pada tahap ini juga individu mengalami perkembangan untuk dapat melakukan penalaran secara abstrak, sehingga mereka mampu menyelesaikan soal matematika dengan menggunakan simbol. Individu dapat melakukan manipulasi simbol untuk menyelesaikan masalah atau soal matematika terkait aljabar (Faizah dkk, 2020a).

Piaget menyebutkan bahwa dalam pemecahan masalah terjadi proses adaptasi melalui interaksi dengan lingkungannya. Pada proses adaptasi terdapat asimilasi, akomodasi, dan ekuilibrasi. Menurut piaget, struktur kognitif merupakan skemata atau kumpulan skema-skema (pengetahuan). Seorang individu dapat mengingat, memahami, dan memberikan respon terhadap stimulus karena bekerjanya skemata yang berkembang sebagai hasil dari interakdi dengan lingkungannya. Semakin baik skemata yang dimiliki seseorang, maka semakin baik pula pola penalarannya.

Adaptasi merupakan proses terbentuknya skemata melalui interaksi langsung dengan lingkungannya. Proses adaptasi melalui proses asimilasi dan akomodasi.

Asimilasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru ke dalam skemata yang sudah terbentuk. Asimilasi menunjukkan kemampuan untuk menjelaskan kejadian berdasarkan skema yang sudah dimiliki. Sedangkan akomodasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru melalui pembentukan skema baru untuk menyesuaikan dengan stimulus yang diterima. Akomodasi dapat terjadi ketika belum ada struktur yang sesuai, sehingga perlu mengubah struktur lama atau membentuk struktur baru agar sesuai dengan dengan stimulus yang diterima.

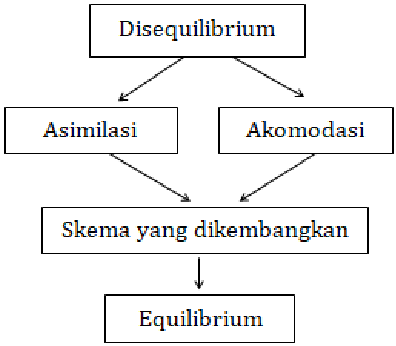


Gambar 3.1. Proses Asimilasi dan Akomodasi

Menyatakan kesesuaian antara struktur masalah dan struktur berpikir

Menyatakan ketidaksesuaian antara struktur masalah dan struktur berpikir

Seseorang dapat menginterpretasikan rangsangan dengan skema yang ada melalui asimilasi, dan dengan akomodasi seseorang dapat mengubah skema yang ada untuk membentuk skema baru agar sesuai dengan rangsangan yang dihadapi untuk mencapai kondisi equilibrium. Equilibrium adalah kondisi seimbang antara asimilasi dan akomodasi karena ada interaksi dari lingkungan sekitar.



Gambar 3.2. Proses Belajar

Ketika seseorang melakukan proses pembelajaran, maka akan terjadi disequilibrium yang dapat memunculkan asimilasi dan akomodasi. Pada saat proses tersebut, skema berkembang melalui proses penggabungan, pengubahan, atau pembentukan skema baru sampai terjadi kondisi equilibrium. Oleh karena itu, proses belajar yang dilakukan seseorang terjadi melalui proses adaptasi dengan lingkungan (masalah) yang dimulai dari disequilibrasi, asimilasi, akomodasi, sampai equilibrium. Proses ini akan terus berlangsung ketika seseorang melakukan proses pembelajaran untuk mendapatkan stimulus baru, sehingga proses berpikir seseorang semakin lama akan semakin kompleks (semakin matang).

Proses asimilasi dan akomodasi berlangsung sampai terjadi kondisi equilibrium. Ketika seseorang sudah memperoleh penyelesaian tetapi belum puas dengan penyelesaian itu (karena masih ragu-ragu), maka seseorang mengalami disequilibrium. Kondisi ini akan mendorong seseorang untuk melakukan refleksi (pengecekan kembali) terhadap jawaban yang sudah diperoleh. Sebaliknya juga, ketika seseorang telah puas terhadap jawaban yang diperoleh, maka proses berpikir orang tersebut sudah mencapai kondisi equilibrium.

2. Jerome Bruner (1915 – 2016)
   Bruner adalah ahli psikologi kognitif yang terinspirasi dari Piaget sebagai gurunya. Bruner juga menjelaskan bahwa belajar harus disesuaikan dengan tingkat perkembangan individu. Bruner menyampaikan bahwa perkembangan intelektual seorang individu dibagi menjadi tiga, yakni:
   a. Fase Pra-Operasional (Enaktif)
      Fase ini disebut juga dengan tahap enaktif yang dialami oleh anak pada usia 5-6 tahun. Pada tahap ini seorang individu belum mampu menggunakan perasaannya terhadap realitas dunia luar. Individu mampu melakukan aktivitas untuk memahami lingkungan sekitarnya dengan menggunakan pengetahuan motorik.

   b. Fase Operasi konkrit (Ikonik)
      Pada tahap ini individu hanya bias memecahkan masalah yang serupa dengan masalah yang sudah pernah dipecahkan sebelumnya. Individu tidak mampu memecahkan masalah yang belum pernah dipecahkan sebelumnya. Individu dapat memahami obyek melalui visualisasi secara verbal atau dapat pula berupa gambar.

c. Fase Operasi Formal (Simbolik)

Pada tahap ini anak sudah mampu berhipotesis dan tidak terbata pada apa yng pernah dihadapi sebelumnya. Seorang individu memiliki ide atau gagasan abstrak yang sangat dipengaruhi oleh kemampuannya dalam berlogika. Ia dapat memahami sesuatu hal hanya dengan menggunakan symbol karena ia menyadari kalua setiap symbol sudah pasti mengandung makna (Faizah dkk, 2020c). Semakin matang seseorang dalam melakukan proses berpikir, maka semakin dominan pula system simbolnya. Oleh karena itu, pada tahap ini pula seseorang dapat melakukan pembuktian matematika yang bersifat formal berdasarkan struktur argumen yang dibentuk (Faizah dkk, 2020b).

3. David Ausuble (1918 – 2008)

Ausuble menyatakan bahwa ada dua jenis belajar, yakni belajar bermakna (*meaningful learning*) dan belajar bermakna (*rote learning*). Belajar bermakna adalah suatu proses belajar dengan informasi baru yang dihubungkan dengan struktur pengertian yang sudah dimiliki seseorang yang sedang belajar. Sedangkan belajar menghafal adalah siswa berusaha menerima dan menguasai bahan yang diberikan oleh guru atau sesuatu hal yang dibaca tanpa makna.

Ausuble menekankan pada kebermaknaan belajar melalui bahasa (*meaningful verbal learning*). Kebermaknaan diartikan sebagai kombinasi dari informasi verbal, konsep, kaidah dan prinsip sehingga belajar melalui hafalan dianggap sebagai belajar yang tidak bermakna

(Hill, 2011). Misalnya dalam pembelajaran matematika bisa dikatakan tidak berhasil jika siswa hanya disuruh menghafal rumus tanpa mengetahui makna dari setiap rumus tersebut. Terdapat beberapa hal yang perlu dilakukan guru agar pembelajaran menjadi bermakna, yakni:

a. *Advance organizer* (pengaturan awal). Hal ini dilakukan untuk mengarahkan siswa pada materi yang akan dipelajari dengan cara mengaitkan materi yang telah ada dalam struktur kognitif siswa. A*dvance organizers* akan memudahkan siswa mempelajari materi pelajaran yang baru, serta hubungannya dengan materi yang telah dipelajarinya (Ekawati, 2019).
b. Diferensial progresif, yakni mengembangkan atau elaborasi konsep. Guru dapat membimbing siswa untuk membuat peta konsep dari materi yang telah dipelajari.
c. *Scaffolding*, yakni guru memberikan bantuan kepada siswa dengan cara memberikan kata kunci dari pertanyaan yang diajukan siswa. Jadi, kalau ada siswa yang bertanya tentang sesuatu hal, maka guru tidak secara langsung memberikan jawaban tetapi membantu siswa mendapatkan jawaban dari pertanyaan yang diajukan dengan cara memberikan kata kunci.

Belajar bermakna dapat terjadi jika siswa memiliki minat dan juga kesiapan untuk melajar. Minat dan kesiapan dapat tercipta jika siswa memiliki motivasi. Purwanto (2004) menyebutkan bahwa motivasi dapat muncul dari diri siswa untuk melakukan tingkah laku. Motivasi yang terpenting adalah motovasi intrinsic, yakni motivasi yang datang dari dalam individu itu sendiri. Motivasi instrinsik dapat dibentuk melalui motivasi ekstrinsik, yakni motivasi yang dating dari luar individu. Misalnya adalah orang tua, guru, teman, dan sebagainya.

4. Edwin Gestalt *Psychology*

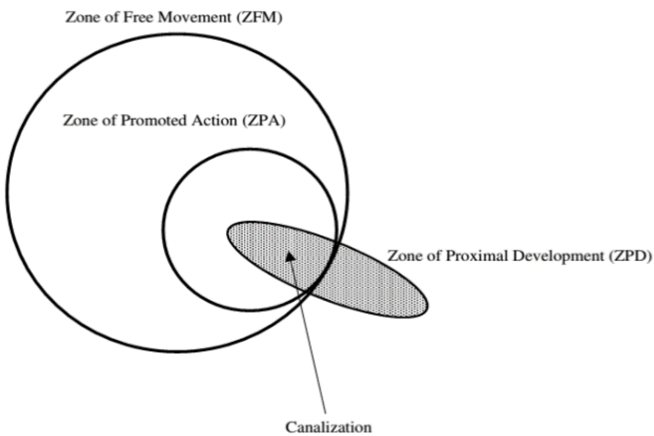
   Pada teori ini menyebutkan bahwa proses pengembangan yang didasarkan pada insight. Insight diartikan sebagai pemahaman terhadap hubungan antar bagian dalam suatu permasalahan yang dapat membentuk tingkah laku (Baharuddin & Esa, 2011). Edwin mengganggap yang terpenting dalam belajar adalah penyesuaian pertama untuk mendapatkan respon atau tanggapan yang tepat.

BAB 4
TEORI SOSIOKULTURAL

Teori belajar sosiokultural lebih menekankan pada pembelajaran yang dilakukan melalui interaksi sosial untuk mendapatkan pemahaman atau untuk memecahkan suatu permasalahan. Teori Vigotsky merupakan salah satu teori penting dalam psikologi perkembangan yang menekankan pada hakikat sosiokultural dari pembelajaran. Menurut Vigotsky pembelajaran dapat dapat terjadi jika anak belajar tentang tugas-tugas yang belum dipelajari tetapi tugas-tugas itu masih berada pada jangkauan. Kemampuan atau tugas-tugas tersebut berada dalam *zona of proximal development*. *Zona of proximal development* merupakan zona perkembangan proksimal atau mediasi, yakni anak yang dalam masa perkembangannya membutuhkan orang lain untuk memahami sesuatu dan memecahkan masalah yang sedang dihadapi (Blanton & Kaput, 2005). Interaksi yang dilakukan anak dengan orang yang lebih mampu terjadi melalui komunikasi lisan.

Komunikasi dalam pembelajaran matematika menekankan pada pembaharuan yang menyatakan bahwasanya pembelajaran yang paling efektif adalah dalam konteks sosial. Perspektif konstruktivis sosial bertujuan agar siswa dapat berdiskusi aktif dengan guru dan rekan mereka, sehingga siswa dapat memperoleh pemahaman yang lebih baik tentang dasar-dasar konseptual matematika dan menjadi pemecah masalah yang lebih baik (Brenner, 1998). Hal ini di dukung oleh teorinya Vygotski (1978) yang menyatakan bahwa pembelajaran terjadi pada saat siswa pertama kali berkolaborasi dengan orang dewasa atau rekan yang kompeten untuk menyelesaikan tugas di luar tingkat kemampuan belajar mandiri, hal ini terjadi di dalam zona pengembangan proksimal *(Zone of Proximal Development)*. Apa yang dicapai dalam konteks sosial kemudian diinternalisasi untuk penguasaan secara individu (Brenner, 1998; Walshaw, 2017).

Vasiner (1987) memperluas pendapat Vygotsky dengan membagi ZPD menjadi 2 yakni: *zone of free movement* (ZFM) dan *zone of promote action* (ZPA) (Abtahi, 2017). ZPD merupakan sekumpulan cara yang mungkin dikembangkan oleh individu siswa, kemudian di dalam ZPD terdapat ZPA sebagai sekumpulan aktivitas yang dipromosikan oleh guru untuk mempengaruhi aktivitas siswa, ZPA sangat terkait dengan ZFM karena ZFM sebagai batasan internal dan eksternal siswa untuk melakukan suatu tindakan atas izin orang yang lebih ahli (Benison, 2016; Abtahi, 2017). Ketiga zona tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:



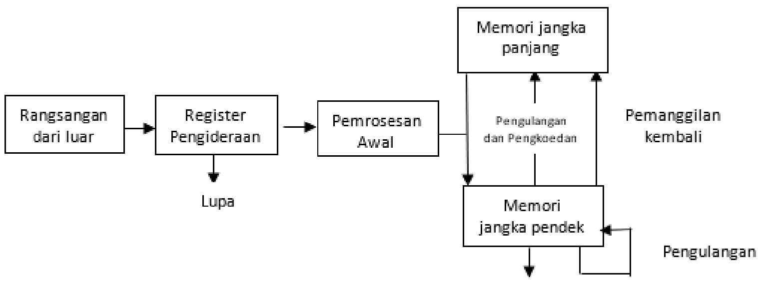
Gambar 4.1. Zona Perkembangan

Terdapat dua kemungkinan yang terjadi ketika guru melakukan komunikasi dengan siswa pada saat pembelajaran, yakni siswa bisa menerima atau menolak aksi promosi yang dilakukan oleh guru (Lamb, 2011; Benison, 2016). Aktivitas promosi yang dilakukan oleh guru pada saat pembelajaran terjadi melalui proses komunikasi dengan siswa. Terdapat beberapa hal yang terjadi pada saat guru mempromosikan suatu obyek pembelajaran kepada siswa, yakni siswa tidak bisa bekerja tanpa bantuan guru atau siswa yang lebih ahli, siswa dapat bekerja secara invidu, siswa tidak merespon apa yang dikatakan guru, serta guru meminta siswa mengulang apa yang telah disampaikan (Fuentes, 2013; Nuhrenborger, 2009). Adapun kerangka kerja untuk melihat aktivitas guru dan siswa dalam melakukan komunikasi berdasarkan ZPA adalah sebagai berikut (Benison, 2016).

Misal dalam pembelajaran matematika guru memberikan sebuah permasalahan kepada siswa yang berupa "Misalkan ada sebuah bangunan berbentuk kubus yang mempunyai panjang rusuk yaitu 17 cm, berapa panjang kawat yang dibutuhkan untuk membuat kerangka kubus dengan panjang 17 cm? Dah silahkan dihitung… bagi yang sudah selesai silahkan maju ke depan". Bagi siswa yang sudah memahami materi tentang kubus maka akan maju memberikan prosedur penyelesaiannya, tapi bagi siswa yang belum memahami sama sekali maka akan bertanya kepada temannya yang lebih mampu atau bertanya kepada guru.

BAB 5
TEORI PEMROSESAN INFORMASI

Teori pemrosesan informasi merupakan salah satu teori belajar yang dikembangkan dari teori kognitif karena menekankan pada proses pembelajaran yang terjadi di otak. Dalam hal ini, informasi secara terus menerus masuk ke dalam otak melalui indera. Dari sekian banyak informasi hampir semuanya terbuang segera dan banyak dari informasi itu malah tidak diterima secara sadar. Sebagian informasi tersimpan di dalam memori otak dalam jangka pendek kemudian dilupakan. Informasi yang akan diingat pertama harus sampai pada indera seseorang, kemudian diterima dan ditransfer dari register penginderaan ke memori jangka pendek, selanjutnya diproses lagi untuk ditransfer ke memori jangka panjang (Nur dkk, 199).



Gambar 5.1. Urutan Pemrosesan Informasi

1. Register Penginderaan
   Komponen pertama dari system memori yang dijumpai oleh informasi yang masuk adalah register pengideraan. Register penginderaan menerima sejumlah besar

informasi dari indera (penglihatan, pendengaran, peraba, pembau, pengecap) dan penyimpanannya dalam waktu yang sangat singkat.

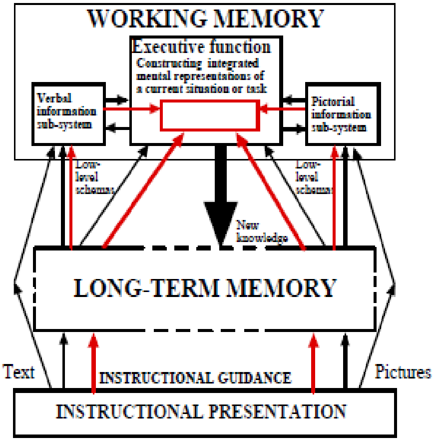
2. Memori Jangka Pendek (*Short Term Memory*)
   Memori jangka pendek adalah system penyimpanan yang dapat menyimpan informasi dalam jumlah yang terbatas dan hanya beberapa detik. Satu cara untuk menyimpan informasi di dalam memori jangka pendek adalah memikirkan tentang informasi atau mengucapkannya berkali-kali.

3. Memori Jangka Panjang (*Long Term Memory*)
   Memori jangka panjang merupakan bagian dari system memori yang berfungsi sebagai tempat menyimpan informasi untuk periode waktu yang panjang. Para ahli membagi memori jangka panjang menjadi 3 bagian, yakni:
   a. Memori episodik, yaitu memori tentang pengalaman pribadi. Suatu gambaran (bayangan) mental tentang sesuatu yang dilihat atau didengar.
   b. Memori semantik berisi fakta-fakta dan generalisasi informasi yang diketahui: fakta, konsep, prinsip, atau aturan untuk memecahkan masalah matematika. Hampir semua yang dipelajari dalam pembelajaran tersimpan dalam memori semantik.
   c. Memori prosedural mengacu pada "mengetahui bagaimana" sebagai lawan dari "mengetahui apa".

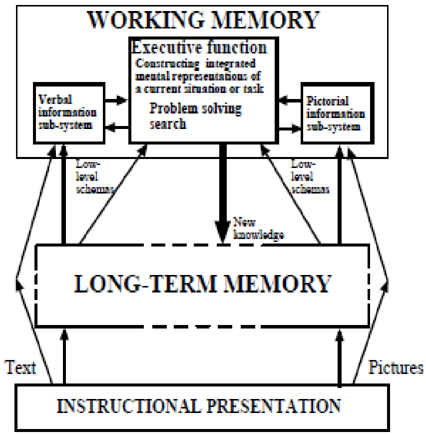
Memori episodik, semantik, dan prosedural berbeda dalam hal cara kerjanya dalam menyimpan dan mengorganisasikan informasi. Informasi dalam memori episodik disimpan dalam bentuk gambaran (bayangan) yang diorganisasikan berdasarkan pada kapan dan dimana peristiwa-peristriwa terjadi. Informasi dalam memori semantik diorganisasikan dalam bentuk jaringan hubungan ide. Informasi dalam memori prosedural disimpan sebagai pasangan stimulus-respon yang kompleks.

Pada tingkat pengetahuan yang lebih tinggi, pengetahuan didasarkan pada penggunaan skema yang diperoleh sebelumnya agar dapat mengatur unsur-unsur pengetahuan dalam memori kerja. Kegiatan yang dirancang untuk mendukung perkembangan skema memungkinkan untuk terjadi secara berlebihan dan tidak efisien.

Terdapat perbedaan struktur kognitif dan proses belajar peserta didik pada tingkat pengetahuan tertentu. Ketika peserta didik pemula belajar tanpa ada bimbingan dari orang yang lebih mampu maka skema beberapa skema tingkat rendah dapat diaktifkan dalam memori jangka panjang. Semua dukungan yang diperlukan untuk membangun pengetahuan baru datang dari bimbingan eksternal (luar) (Gambar 5.2). Jika dukungan tersebut tidak tersedia (situasi kognitif tidak optimal), maka peserta didik pemula harus terlibat dalam masalah proses pencarian kognitif secara tidak efisien yang menghasilkan kurang belajar (Gambar 5.3).

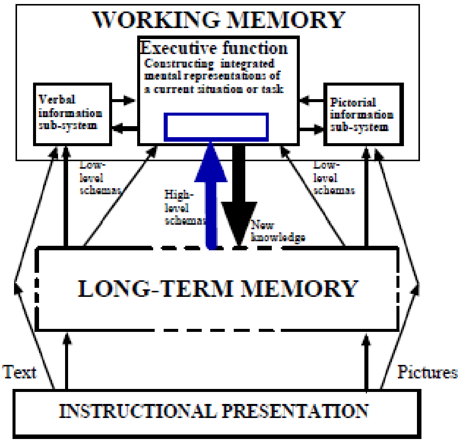


Gambar 5.2. Struktur dan Proses Kognitif untuk Pembelajar Pemula melalui Bimbingan

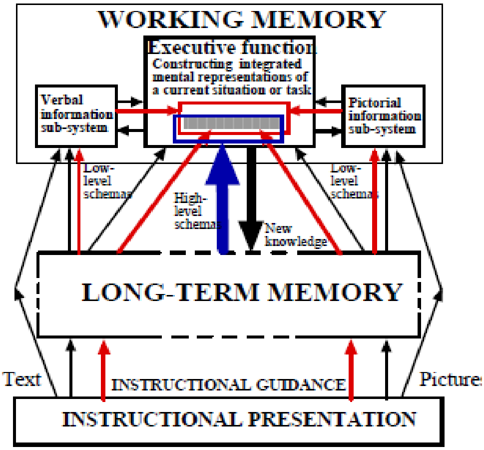


Gambar 5.3. Struktur dan Proses Kognitif untuk Pembelajar Pemula tanpa Bimbingan

Namun jika instruksi dengan bimbingan tingkat rendah disajikan kepada peserta didik yang berpengalaman (situasi kognitif optimal) dan telah diperoleh sebelumnya, maka skema tingkat tinggi mungkin memberikan semua dukungan yang diperlukan dalam membangun representasi kognitif baru (Gambar 5.4). Jika peserta didik mengalami pada saat diberikan instruksi dengan tingkat bimbingan tinggi (situasi kognitif non-optimal), baik bimbingan instruksional eksternal maka skema yang diperoleh sebelumnya akan mendukung pembentukan komponen yang sama dari pengetahuan baru. Unit kognitif dalam memori kerja sebagian bisa tumpang tindih dan bertentangan satu sama lain (Gambar 5.5) (Kalyuga, 2009).



Gambar 5.4. Struktur dan Proses Kognitif untuk Pembelajar ahli tanpa Bimbingan



Gambar 5.5. Struktur dan Proses Kognitif untuk Pembelajar Ahli melalui Bimbingan

BAB 6
TEORI APOS

Dubinsky (2000) mengatakan bahwa teori tentang mengonstruk pengetahuan baru yang merupakan bagian dari konstruktivs dari Piaget. Teori APOS merupakan teori konstruktivis yang mempelajari tentang bagaimana belajar suatu konsep matematika. Teori APOS didasarkan pada hakikat pengetahuan matematis (*mathematical knowledge*) dan bagaimana pengetahuan tersebut berkembang. Teori ini mengemukakan bahwa individu mengkonstruksi konsep matematika melalui empat tahap, yakni Aksi, Proses, Obyek, dan Skema yang diadaptasi dari ide Piaget (Dubinsky, 2000). Dalam teori APOS, sebuah Aksi diinternalisasi sebagai Proses, Proses diencapsulasi ke dalam sebuah Obyek. Selanjutnya Obyek dikaitkan dengan pengetahuan yang lain dalam sebuah Skema. Juga ditemukan bahwa sebuah Skema juga bisa diencapsulasi sebagai sebuah obyek..

Aksi merupakan suatu aktivitas yang berupa pengulangan fisik atau manipulasi mental yang didasarkan pada beberapa algoritma secara eksplisit. Suatu aksi dapat dimaksudkan sebagai transformasi fisik atau mental dari objek untuk memperoleh objek lain. Apabila aksi dilakukan secara berulang dan dilakukan refleksi atas aksi itu, maka aksi-aksi tersebut diinteriosasi menjadi Proses, yaitu suatu konstruksi insternal yang dilakukan pada aksi yang sama tetapi tidak membutuhkan rangsangan eksternal. Interiosasi merupakan suatu tahapan dimana anak melakukan operasi terhadap obyek-obyek matematika pada tahapan yang rendah (Sfard, 1991). Suatu proses dikatakan telah terinteriosasi jika anak melakukan operasi tanpa berpikir selama melakukan operasi. Misalnya, siswa menyelesaikan persamaan satu variabel, jika siswa tersebut dapat menemukan hasil dari penyelesaian yang dilakukan, maka dapat dikatakan bahwa konsep itu telah terinteriosasi pada diri siswa tersebut. Hal ini disebabkan siswa telah mengingat proses yang harus dilakukan untuk menyelesaikan suatu persamaan.

Seorang siswa dapat mengonstruk objek kognitif dengan dua cara. Pertama, jika siswa merefleksi aksi yang diterapkan untuk proses tertentu, dan sadar bahwa proses itu sebagai totalitas, maka individu tersebut melakukan rekonstruksi proses ini sebagai objek kognitif. Pada kasus ini, dikatakan bahwa proses di-enkapsulasi (*encapsulated*) menjadi *objek*. Kedua, untuk mengkonstruk suatu objek kognitif, seorang siswa melakukan refleksi pada suatu skema tertentu dan sadar bahwa skema tersebut sebagai totalitas serta dapat melakukan aksi padanya. Pada kasus ini, dikatakan bahwa individu men-*tematisasi* (*thematized*) skema menjadi objek. *Skema* dalam matematika adalah koleksi individu atas aksi, proses, objek, dan skema lain yang dikaitkan dalam kerangka kerja pada pikiran individu dalam menghadapi suatu problem matematika (Mulyono, 2011).

Objek yang telah tersimpan dalam memori seorang anak sebagai pengetahuan yang akan diproses bila terjadi aksi yang diakibatkan adanya stimulus tertentu. Menurut teori ini, ketika seorang siswa berusaha memahami suatu konsep matematika maka prosesnya dimulai dari suatu aksi mental terhadap konsep matematika. Selanjutnya dilakukan pengkonstruksian suatu skema tentang konsep matematika tertentu yang tercakup dalam masalah yang diberikan.

Konsepsi aksi adalah suatu transformasi objek-objek matematika berdasarkan pada sebuah algoritma tertentu untuk memperoleh objek matematika lainnya. Hal itu dialami anak pada saat menghadapi suatu problem matematika serta berusaha menghubungkannya dengan pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya. Seorang siswa dikatakan mengalami suatu aksi, apabila siswa tersebut memfokuskan proses mentalnya pada upaya untuk memahami suatu konsep yang diberikan. Seorang siswa yang memiliki pemahaman lebih mendalam tentang suatu konsep, mungkin akan melakukan aksi yang lebih baik atau dapat juga fokus perhatiannya keluar dari konsep yang diberikan.

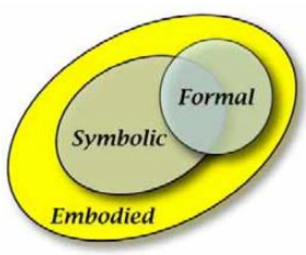
Konsepsi proses merupakan transformasi internal tentang suatu objek. Seorang siswa dikatakan berada pada konsepsi proses, apabila berpikirnya terbatas pada ide matematik yang dihadapi, ditandai dengan munculnya kemampuan untuk membicarakan (*to describe*) atau melakukan refleksi atas konsep matematika tersebut. Proses-proses baru dapat dikonstruksi dari proses lainnya melalui suatu koordinasi serta pengaitan antar proses.

Seorang siswa dikatakan telah memiliki sebuah konsepsi objek tentang konsep matematika apabila mereka telah mampu memperlakukan konsep tersebut sebagai sebuah objek kognitif yang mencakup kemampuan untuk melakukan aksi atas objek tersebut serta memberikan penjelasan tentang sifat-sifatnya. Selain itu, siswa tersebut juga telah mampu menguraikan kembali (*de-encapsulate*) suatu objek menjadi proses sebagaimana asalnya pada saat sifat-sifat dari objek yang dimaksud akan digunakan (Kusaeri, 2015).

BAB 7
TEORI TIGA DUNIA MATEMATIKA

Teori tiga dunia matematika ditemukan oleh David Tall yang lahir pada 15 Mei 1941. Beliau merupakan seorang "*Professor in Mathematical Thinking*" atau Profesor yang ahli dalam bidang berpikir matematis. Beliau menjadi Profesor Emeritus (gelar professor atau guru besar yang diperoleh ketika seseorang sudah pensiun). Beliau menggunakan istilah '*set before*' untuk merujuk pada struktur mental manusia yang dibawa sejak lahir. *Set before* dapat bekerja secara maksimal pada saat otak manusia membuat koneksi pada awal kehidupan. Tall (2008) menyatakan bahwa terdapat tiga *set before* yang dapat menyebabkan manusia berpikir secara matematis. Adapun ketiga hal tersebut adalah (1) Pengenalan pola, persamaan, dan pertidaksamaan, (2) Pengulangan rangkaian tindakan agar menjadi otomatis, (3) Bahasa yang dapat menggambarkan dan memperbaiki cara berpikir siswa terhadap suatu konsep tertentu.

Ketika siswa atau mahasiswa di tingkat universitas mulai belajar tentang konsep matematika yang bersifat formal, mereka menggunakan pengalaman untuk membangun pengetahuannya. Pengetahuan dapat dibangun melalui gambar visual, symbol aritmatik, aljabar, dan kalkulus. Matematika formal (*formal mathematics*) dapat dibangun melalui dibangun melalui kombinasi dari perwujudan (*embodied*) dan simbol (*symbolic*).



Gambar 7.1. Tiga Dunia Matematika

Keterkaitan antara *embodied, symbolic,* dan formal mempunyai makna yang spesifik, yakni:

1. Perwujudan dikembalikan pada konsep perwujudan sebagai bentuk refleksi terhadap pengalaman yang dimiliki.
2. Simbol tidak dikembalikan pada simbol secara umum, tapi simbol digunakan dalam perhitungan matematika dan manipulasi aritmatika dan aljabar. Hal ini muncul melalui aksi pada obyek (misal: perhitungan) simbol dan manipulasi sebagai konsep (misal: bilangan). Sebuah simbol digunakan secara bersamaan dalam bentuk proses representasi (misal: penambahan) dan konsep (misal: penjumlahan) yang disebut *procept*
3. Matematika formal didefinisikan sebagai konsep matematika sebagai struktur aksioma yang bersifat deduktif dalam bentuk bukti formal.

Setelah merumuskan tiga *set before* tersebut, kemudian Tall menggambarkan cara berpikir seseorang dalam pembelajaran matematika melalui "tiga dunia matematika" yang meliputi:

1. Dunia perwujudan-konseptual (*conceptual-embodied*), berdasarkan persepsi dan refleksi dari sifat obyek, yang dilihat secara inisial kemudian dirasakan dan dibayangkan dalam pikirna.

2. Dunia simbolis-proseptual (*proceptual-symbolic*) yang tumbuh dari dunia perwujudan melalui aksi dan symbol yang berfungsi sebagai proses untuk melakukan suatu hal dan konsep untuk berpikir (prosep).
3. Dunia formal-aksiomatik yang berdasarkan definisi dan dan pembuktian, membalik urutan konstruktivis makna dari suatu definisi yang didasarkan pada obyek yang telah dikenal agar bisa menuju ke konsep yang didasarkan pada definisi secara set-teoretik.

Masing-masing dunia terjadi secara langsung untuk meningkatkan argumen deduktif. Misalnya dalam dunia perwujudan, kita bisa melihat penjumlahan komutatif dari bentuk 3+4 atau 4+3 yang mempunyai hasil 7. Dalam dunia simbolik, anak bisa menghitung kedua bentuk penjumlahan tersebut dengan jawaban yang sama. Dalam dunia formal, bentuk $x + y = y + x$ adalah aksioma yang benar untuk penjumlahan dua bilangan.

Oleh karena itu, masing-masing dunia mempunyai cara untuk meningkatkan pengetahuan berdasarkan pengalaman yang dimiliki. Dunia perwujudan didasarkan pada persepsi sensori kemudian menganalisis, mendeskripsikan, mendefinisikan dan memberikan argumen verbal. Dunia simbolik merubah dari yang berfokus pada aksi untuk meningkatkan prosedur pengalaman ke struktur konsep aritmatika dan symbol aljabar secara umum. Berpikir formal kebalikan dari pengalaman. Hal ini dapat digantikan dengan menganalisis konsep yang muncul untuk menentukan sifat-sifat sebagai aksioma kemudian mengonstruk sifat-sifat yang lain melalui pembuktian formal.

Transisi Berpikir Formal dalam Matematika

Pembelajaran jangka panjang (*long-term learning*) dibangun dari struktur genetik yang dapat dikembangkan oleh setiap individu berdasarkan pengalaman yang dimiliki. Setiap individu mempunyai dua kemampuan dasar yang dibawa sejak lahir. Pertama, *set-before* muncul dari genetik seseorang yang terkait dengan kemampuan berpikir matematis. Individu juga dapat tumbuh secara alami melalui interpretasi terhadap situasi baru berdasarkan pengalaman atau disebut juga dengan *met-before*.

Set-before digunakan untuk mengembalikan struktur mental seseorang yang dibawa sejak lahir. Misalnya, struktur visual yang dibangun dari sistem otak untuk mengidentifikasi warna, mengidentifikasi titik, koordinat titik untuk melihat suatu obyek. Seorang anak yang lahir dengan sistem biologis untuk mengenali bilangan terkecil dari suatu obyek (satu, dua, atau mungkin tiga) sebelum anak belajar berhitung.

Set-before menggunakan kemampuan sosial untuk interaksi dengan menggunakan gestur seperti titik-titik yang digunakan untuk menggambar sesuatu. Terdapat tiga konsep *set-before* yang terbentuk melalu pembelajaran jangka panjang (*long-term learning*) sebagai cara untuk berpikir matematis, yakni (1) Pengenalan pola kebiasaan, persamaan, dan perbedaan, (2) Pengulangan berdasarkan urutan dari aksi sampai menjadi otomatis, (3) Bahasa untuk mendeskripsikan dan menyusun cara dalam melakukan proses berpikir.

Pengenalan dan pengulangan berfungsi sebagai kekuatan Bahasa, dan penggunaan simbol yang memungkinkan seseorang focus pada ide agar dapat membentuk pola angka.

Sedangkan pengulangan menjadi sesuatu hal yang sangat penting karena dapat digunakan untuk mengetahui proses dan konsep (*procept*) seseorang ketika berpikir. Perkembangan matematika sangat bergantung pada ketiga konsep *set-before* di atas karena seseorang dapat menentukan pola bilangan dan juga menentukan kategori angka sampai dengan tak hingga. Seseorang dapat menganggap tak hingga (∞) sebagai satu kesatuan yang tidak mempunyai batas.

BAB 8
PEMBELAJARAN MATEMATIKA

A. Pembelajaran

Belajar merupakan proses perubahan perilaku individu yang terjadi secara aktif, proses yang diarahkan pada suatu tujuan, proses berbuat melalui berbagai pengalaman, proses melihat, mengamati, dan memahami sesuatu yang dipelajari. Sedangkan pembelajaran adalah proses interaksi siswa dengan guru dan juga sumber belajar yang terjadi pada suatu lingkungan belajar. Pembelajaran merupakan bantuan yang diberikan oleh pendidik agar terjadi proses pemerolehan ilmu pengetahuan. Dengan kata lain, pembelajaran adalah proses membantu siswa agar mampu belajar dengan baik.

Setiap pembelajaran tidak terlepas dari yang namanya argumen karena setiap siswa hendaknya mampu menyampaikan pemahamannya terkait materi yang sedang dipelajari. Argumen merupakan alat yang digunakan untuk menggali lebih dalam tentang sebuah keputusan yang terjadi secara rasional. Argumen sebagai keutamaan dalam mengonstruk pengetahuan. Mengonstruk pengetahuan adalah proses menyusun fakta berdasarkan bukti dan penjamin (*warrant*), sehingga penyusunan fakta tidak hanya berdasarkan dugaan (*plausible*).

Analisis terhadap argumen dalam pembelajaran dapat dilakukan dengan menggunakan tiga jenis argumen sebagai berikut:

1. *Socioscientific arguments*

   Dalam pembelajaran di kelas, proses beragumen menjadi teknik pedagogik yang bermanfaat karena siswa dapat berpikir secara scientific ketika mereka meangartikulasikan kebenaran klaim, sehingga guru dapat mengidentifikasi miskonsepsi siswa saat pembelajaran. Hal ini disebabkan kekuatan dan kelemahan suatu klaim akan mempengaruhi justifikasi atau keyakinan siswa terhadap suatu ilmu pengetahuan (Knight dkk. 2015).

Jika kita berbicara tentang *scientific argument* maka kita membahas tentang proses berpikir secara scientific karena terkait dengan mengonstruk ilmu pengetahuan. Siswa dapat mengonstruk ilmu pengetahuan melalui evaluasi terhadap klaim, mempertimbangkan sebuah bukti, dan alternative penjelasan tentang sebuah kritik sosial.

Konteks *socioscientific* terjadi ketika siswa mempelajari isu-isu sosial yang terjadi secara konseptual, prosedural, atau secara teknologi yang terkait dengan ilmu pengetahuan (*science*). Isu *socioscientific* seringnya digunakan dalam memecahkan permasalah *open-ended* yang mempunyai beragam solusi. Hal ini disebabkan siswa dapat menggunakan kesempatan untuk menyatakan argumennya ketika pembelajaran.

Dalam suatu argumen, justifikasi digunakan untuk mendukung klaim. Jika klaim yang diberikan tidak benar atau tidak bagus, maka argumen yang dikeluarkan tidak bagus atau tidak berkualitas. Akan tetapi, kualitas dari justifikasi dapat didukung dengan *rebuttal* sebagai penyangkal dari suatu argumen yang tidak benar (Knight dkk, 2015).

2. Argumen Walton

   Douglas Walton mengemukakan tentang skema argumen yang terkait dengan penalaran hanya didasarkan pada sebuah anggapan. Walton menganggap bahwa penalaran dan argumen merupakan dua hal yang sangat terkait untuk menentukan klaim.

   Beliau menggagas penalaran berdasarkan anggapan yang bersifat pragmatis untuk membuat suatu generalisasi. Penalaran ini dinamakan *plausible reasoning*. Model penalaran ini merupakan kegagalan atau penalaran monoton yang didiskusikan dalam pengetahuan komputer.

   Penalaran Plausible terkenal pada zaman kuno karena digunakan sebagai dasar dalam memberikan argumen di Eikos berdasarkan anggapan yang dilihat. Argumen eikotik tidak dapat meyakinkan suatu proposisi yang muncul secara benar kepada seseorang tetapi mungkin salah di mata orang lain. Akan tetapi, pada zaman modern menunjukkan tentang penalaran yang didasarkan pada representasi sebuah persepsi agar terlohat jelas. Penalaran plausible dapat digunakan untuk mendukung kesimpulan dari sebuah kritik. direpresentasikan yang didasarkan pada persepsi (Walton dkk, 2014).

3. Argumen Toulmin

Skema argumen Toulmin muncul pada 1958 oleh Stephen Toulmin (Bizup, 2009). Skema argumen Toulmin memiliki kelebihan dibanding model argumen yang lain karena skema Toulmin juga dapat digunakan untuk menganalisis argumen dalam bidang *socioscientific* (Lambert & Bleicher, 2017).

Skema argumen Toulmin membawa pengaruh positif dalam model argumen modern, khususnya dalam menganalisis struktur argumen. Toulmin mulai berpikir bahwa argumen adalah klaim (C) yang diturunkan dari data (D) dan didasarkan pada *warrant* (W). Sementara itu, secara sederhana memiliki kemiripan dengan argumen dalam logika deduktif, generalisasi yang lebih besar dapat dicapai melalui komponen tambahan. Argumen kemungkinan besar mempunyai modal *qualifier* (Q), seperti "semestinya" atau "kemungkinan", yang menjelaskan kekuatan *warrant*. Suatu *warrant* dapat tidak harus muncul, tetapi pada kondisi pengecualian atau *rebuttal* (R). Kita mungkin juga dapat melacak *backing* (B) sebagai pendukung *warrant*.

Skema argumen Toulmin baru digunakan dalam bidang pendidikan matematika pada tahun 1990. Skema argumen Toulmin dirancang dalam penelitian pendidikan matematika sebagai alat untuk menganalisis argumen siswa, guru, maupun calon guru (Simpson, 2015). Oleh karena itu, pada pembahasan buku ini menggunakan skema argumen Toulmin karena memiliki kelebihan untuk menganalisis berbagai jenis argumen, tidak hanya argumen matematika.

Pembelajaran yang dikhususkan dalam buku ini adalah pembelajaran pada tingkat perguruan tinggi. Mahasiswa program studi pendidikan matematika merupakan calon guru yang akan mengajarkan konsep-konsep matematika kepada peserta didik di sekolah, sehingga mereka dituntut agar mempunyai kemampuan memberikan argumen secara valid berdasarkan konsep matematika. Kemampuan mahasiswa dalam mengungkapkan argumen dapat diketahui dari proses berpikir yang dilakukan selama menyelesaikan masalah pembuktian matematika. Proses berpikir matematis merupakan salah satu jenis berpikir yang harus dimiliki oleh mahasiswa dalam mengungkapkan argumen secara valid ketika menyelesaikan masalah pembuktian.

B. Argumen dan Pembuktian

Argumen dalam matematika tidak hanya sekedar alasan yang berupa kata-kata tentang sesuatu hal, tetapi argumen terdiri dari premis-premis dan kesimpulan. Argumen juga merupakan pembuktian yang akan menghasilkan suatu kesimpulan berdasarkan berpikir secara rasional untuk mendapatkan pembuktian secara formal.

Salah satu mata kuliah yang menuntut mahasiswa melakukan pembuktian secara formal adalah mata kuliah Aljabar. Di program studi pendidikan matematika memiliki dua jenis mata kuliah aljabar, yakni aljabar abstrak dan aljabar linier elementer. Keduanya memuat masalah yang menuntut mahasiswa melakukan pembuktian secara formal berdasarkan struktur argumen yang valid.

Buku ini mengkaji tentang analisis struktur argument mahasiswa dalam menyelesaikan masalah pembuktian matematika berdasarkan proses berpikir matematis. Kemampuan mahasiswa dalam memberikan argumen pada suatu pembuktian dapat dilihat dari proses berpikir yang dilakukan. Analisis terhadap suatu argumen dalam pembuktian aljabar dapat dianalisis dengan menggunakan skema argumen model Toulmin, sedangkan analisis terhadap proses berpikir mahasiswa dianalisis dengan menggunakan teori tiga dunia matematika dan teori tentang proses kognitif dalam membuktikan preposisi matematika.

Pembuktian merupakan masalah matematika yang di dalamnya memerlukan argumen dalam penyelesaiannya karena pada setiap langkah pembuktian diperlukan alasan yang logis. Hasil penelitian Varghese (2009) terhadap guru sekolah menengah menunjukkan bahwa konsep guru tentang makna pembuktian dalam matematika menghasilkan enam kategori, yakni pembuktian sebagai verifikasi, pembuktian sebagai turunan *(derivation)*, pembuktian sebagai argumen logis, pembuktian sebagai justifikasi, pembuktian sebagai penemuan, dan pembuktian sebagai penjelasan. Suatu argumen yang diberikan oleh guru dan siswa dalam menyelesaikan masalah pembuktian matematika dapat berupa pernyataan verbal atau non-verbal.

Masalah pembuktian matematika pada tingkat sekolah dapat diajarkan oleh guru melalui tiga cara, yakni struktural/sintaksis, prosedural, dan secara semantik (Weber

& Alcock, 2005). Sintaksis merupakan membangun argumen dalam pembuktian matematika berdasarkan pada teorema atau materi yang telah diterima sebelumnya tanpa merepresentasikan ide atau tanpa memahami. Sedangkan gaya pengajaran semantik adalah pengajaran yang melibatkan berpikir tentang obyek matematika yang terkait dengan pernyataan sebelumnya *(backing)*. Pengajaran secara prosedural merupakan gaya pengajaran masalah pembuktian yang mempunyai kekurangan pada makna semantik, karena hanya mengikuti prosedur penyelesaian yang sudah ada. Mahasiswa dapat menggunakan teorema atau materi sebelumnya untuk menyelesaikan masalah pembuktian yang sedang diihadapi kemudian mereka diminta mengkomunikasika hasil pembuktian yang telah dilakukan. Hal ini dilakukan agar mereka tidak melakukan pembuktian matematika secara prosedural.

Menurut Mukuka & Shumba (2016), masalah pembuktian tidak dapat dipisahkan dari matematika karena di dalamnya terdapat komponen penting yang harus dikomunikasikan. Pembuktian merupakan alat matematika, karena seseorang dapat mengkonstruk pengetahuan yang dimiliki melalui soal pembuktian (Netti dkk, 2016). Masalah atau soal pembuktian dalam matematika mempunyai peranan penting karena melalui soal pembuktian dapat diketahui proses berpikir yang dilakukan oleh seseorang.

BAB 9
ANALISIS ARGUMEN DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

A. Argumen dalam Pembuktian Matematika

Pembuktian merupakan argumen matematis yang terkait dengan serangkaian pernyataan terhadap klaim matematika (Bleiler dkk, 2014). Argumen merupakan alat untuk mengkonstruk pengetahuan seseorang tentang proses pengambilan keputusan secara rasional (Metaxas dkk, 2016). Argumen juga dapat disebut sebagai alasan yang digunakan dalam melakukan aktivitas pembuktian, akan tetapi secara matematis argumen dapat didefinisikan sebagai serangkaian pernyataan yang terdiri dari premis-premis dan kesimpulan.

Argumen merupakan suatu hal yang penting dalam masalah pembuktian karena bukti dalam matematika berisi tentang rangkaian pernyataan yang disusun secara logis berdasarkan proses berpikir matematis. Suatu pernyataan dalam bukti matematis didefinisikan sebagai kalimat deklaratif yang bernilai benar atau salah (Rossi, 2006). Kalimat deklaratif adalah kalimat yang bersifat menerangkan, misalkan "2+3=5" secara umum selalu bernilai benar, tetapi kalau "2=5" sudah pasti bernilai salah. Suatu bentuk pernyataan yang bernilai benar untuk setiap kebenaran komponennya disebut tautologi. Sedangkan bentuk pernyataan yang bernilai salah untuk semua kemungkinan kondisi kebenaran komponennya disebut kontradiksi (Morash, 1987). Tautologi juga dapat didefinisikan dengan beberapa pernyataan yang selalu bernilai benar, sedangkan beberapa pernyataan yang selalu bernilai salah dinamakan kontradiksi (Bartle, 2000). Kemungkinan kebenaran komponen dalam tautologi dan kontradiksi adalah komponen premis yang akan membentuk suatu kesimpulan.

Secara matematis, argumen terbentuk dari premis-premis $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ dan kesimpulan (q) dikatakan valid jika dan hanya jika bentuk pernyataan $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ maka (q) adalah suatu tautologi (Morash, 1987). Pembuktian matematika merupakan argumen yang disusun dengan tujuan untuk meyakinkan seseorang tentang kebenaran dari suatu pernyataan. Suatu argumen dapat diterima oleh orang sekitarnya jika pernyataan yang disampaikan adalah benar atau valid. Oleh karena itu validasi dalam mengonstruksi bagian pembuktian dapat dilakukan dengan cara menginterpretasikan teorema dan definisi (Selden & Selden, 2003). Terdapat tiga karakteristik argumen, yakni:

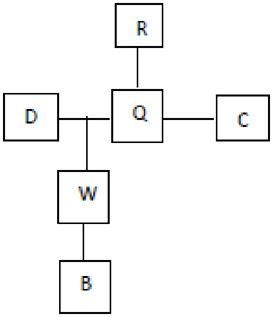
1. Menggunakan pernyataan yang dapat diterima oleh komunitas *(set of accepted statements)*, pernyataan tersebut bernilai benar tanpa perlu pembenaran lebih lanjut.
2. Memakai bentuk penalaran *(modes of argumentation)* sebagai model argumen yang valid tentang pembahasan konsep secara mendalam.
3. Merepresentasikan model argumen *(modes of argument representation)* dengan cara mengkomunikasikan pengetahuan yang tepat berdasarkan kekayaan konseptual yang telah disepakati oleh komunitas matematika.

Struktur argumen dalam pembuktian matematika terbentuk dari serangkaian pernyataan berupa premis-premis dan kesimpulan yang benar. Serangkaian pernyataan tersebut akan membentuk silogisme dalam pembuktian matematika secara deduktif (Aberdein, 2006). Suatu silogisme dapat dibangun oleh mahasiswa ketika menyelesaikan masalah pembuktian dengan cara mengonstruk pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya. Secara umum argumen dapat diartikan sebagai hasil dari proses merekonstruksi pengetahuan yang dimiliki untuk membentuk pernyataan berdasarkan proses berpikir yang dilakukan, sedangkan argumentasi adalah proses membentuk pernyataan yang dapat diterima dan disetujui oleh komunitas matematika (Banegas, 2013).

B. Komponen Argumen

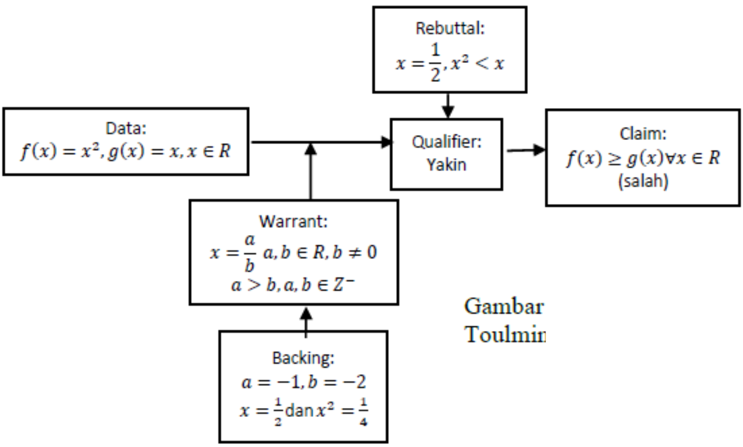
Suatu argumen dalam pembuktian matematika perlu dianalisis dengan menggunakan format yang lain, karena analisis terhadap argumen tidak cukup hanya dilihat dari premis dan kesimpulan yang terbentuk (Toulmin, 2003). Analisis terhadap argumen dilakukan dengan mengamati setiap komponen-komponennya yang berupa: (1) Data (D) adalah dasar atau fakta yang didasarkan pada argumen, (2) *Claim* (C) adalah posisi atau pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya, (3) *Warrant* (W) adalah penjamin yang digunakan untuk membuat kesimpulan berdasarkan data dan klaim. Warrant dapat disebut juga sebagai penjamin yang dijadikan dasar untuk menguraikan suatu pembuktian, (4) *Backing* (B) adalah pendukungnya warrant yang diakui secara umum, (5) *Rebuttal* (R) adalah kondisi pengecualian untuk argumen, yakni pernyataan yang mengindikasikan keadaan tertentu ketika suatu argumen tidak dibenarkan secara umum, (6) *Qualifier* (Q) adalah tingkat kepercayaan terhadap kesimpulan yang diperoleh.

Keenam komponen argumen tersebut dapat digambarkan dalam bentuk skema model Toulmin seperti pada Gambar 9.1.



Gambar 9.1. Skema Model Toulmin

Aplikasi skema Toulmin dalam menganalisis argumen matematis saat menyelidiki pernyataan “jika (x) = $x2$ dan (x) = x, $\forall x \in R$ maka (x) ≥ (x)” (Laamena dkk, 2018) dapat dilihat pada Gambar 9.2.



Gambar 9.2. Aplikasi Skema Toulmin

Pada gambar diatas menunjukkan Skema Toulmin dapat digunakan untuk mengetahui ada atau tidaknya sanggahan dari suatu argumen dan dapat digunakan untuk mengetahui argumen tersebut valid atau tidak, karena sanggahan *(rebuttal)* tidak selalu muncul pada setiap pembuktian matematika (Bizup, 2009). Skema Toulmin dapat juga digunakan untuk menganalisis argumen formal maupun informal (Aberdian, 2006). Hal ini menunjukkan keleluasaan skema Toulmin dalam menganalisis berbagai bentuk argumen termasuk argumen matematis.

Weber & Alcock (2005) menyebutkan bahwa dalam suatu argumen paling sedikit memuat tiga elemen penting yakni data, kesimpulan, dan warrant. Oleh karena itu warrant mempunyai peranan penting dalam hal membuat kesimpulan dan melakukan penalaran, karena melalui warrant dapat diketahui kebenaran dari pembuktian yang dilakukan.

Analisis argumen yang disampaikan guru dalam mengajarkan masalah pembuktian matematika terdiri dari empat kategori yakni a *priori warrant, institutional warrant, empirical warrant, dan evaluative warrant* (Freeman, 2005, Nardi, dkk., 2014). *A priori warrant* bisa berupa teorema, definisi, atau prinsip yang sengaja digunakan dalam pembuktian, sedangkan tiga yang lainnya didasarkan pada kemampuan atau pengalaman (pedagogik) guru dalam menentukan definisi, atau teorema yang akan digunakan.

Berdasarkan uraian di atas dapat diketahui bahwa pembuktian matematika merupakan struktur argumen yang memuat pernyataan tegas yang sudah dijamin kebenarannya, sehingga tidak menimbulkan pertentangan dalam komunitas matematika. Struktur argumen tersebut disusun berdasarkan premis-premis yang benar untuk mendapatkan kesimpulan yang valid, karena hukum silogisme menyebutkan bahwa pernyataan yang terdiri atas serangkaian premis yang benar, akan menghasilkan kesimpulan yang benar dan bersifat deduktif.

C. Analisis Argumen dalam Pembuktian Aljabar

Proses berpikir merupakan suatu hal yang sangat diperlukan dalam menyelesaikan masalah pembuktian, karena dalam menyelesaikan masalah pembuktian harus disertai dengan alasan-alasan yang berupa penjamin untuk mendapatkan kesimpulan yang benar. Alasan ini dapat diperoleh melalui proses berpikir analitis yang dilakukan mahasiswa. Berpikir analitis sangat diperlukan dalam menyelesaikan masalah pembuktian, karena dalam melakukan bukti matematis diperlukan uraian. Model berpikir analitis dimulai dari sebuah proses pemantauan, pendukungan, koreksi atau penolakan terhadap respon inisial intuitif (Rusou dkk, 2013; Leron & Hazzan, 2009). Berpikir analitis merupakan suatu tindakan yang terjadi di otak terkait situasi, praktek permasalahan, pernyataan, ide, teori, dan argumen (Thaneerananon dkk, 2016).

Analisis argumen dalam pembuktian matematika tidak cukup hanya dilihat dari hasil tes tertulis mahasiswa saja, tetapi juga perlu dilakukan eksplorasi terhadap aktivitas mental mahasiswa ketika menguraikan setiap langkah pembuktian. Berpikir merupakan aktivitas mental atau intelektual yang dilakukan oleh individu. Berpikir dapat diartikan sebagai aktivitas mental yang terjadi di otak untuk mengingat, memahami, mencari atau membuat cara, menganalisis, mensintesis masalah dalam rangka menyelesaikannya (Subanji, 2011).

Berpikir merupakan aktivitas mental yang dilakukan oleh seseorang terkait pengetahuan yang sudah dimiliki sebelumnya dengan informasi baru untuk membuat keputusan, mencari pemahaman dan menyelesaikan masalah (Slavin, 1994). Seorang mahasiswa dapat memperoleh makna atau pemahaman tentang sesuatu hal yang dihadapi melalui proses berpikir yang dilakukan. Proses berpikir dapat dilakukan melalui pengalaman terhadap fenomena matematika yang dapat memicu suatu pertanyaan (Mason, 2005).

Fenomena ini dapat berupa gambar, bayangan *(imaginal)*, simbol, atau hubungan sosial. Suatu fenomena dalam matematika dapat berupa konjektur yang merupakan dugaan dari suatu pernyataan. Pernyataan ini dapat bernilai benar atau salah. Kemampuan mahasiswa dalam mengungkapkan kebenaran dari suatu fenomena dapat terjadi melalui memori kerja otak secara perlahan, sadar, penuh usaha, atau berdasarkan logika. Sistem kerja otak yang seperti ini dapat dikatakan sebagai berpikir analitis, sedangkan sistem kerja otak yang terjadi secara cepat, kurang usaha, tidak sesuai *(inflexible)* dikatakan sebagai berpikir intuitif (Leron & Hazzan, 2009). Mahasiswa yang melakukan berpikir secara analitis dapat memberikan jawaban yang benar atau salah dengan disertai cara yang benar, sedangkan mahasiswa yang menyelesaikan secara intuitif memberikan jawaban yang benar tetapi cara yang digunakan belum tentu benar.

Analisis terhadap proses berpikir mahasiswa dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa teori, dianataranya teori tiga dunia matematika. Pada teori tiga dunia matematika membagi proses berpikir matematika menjadi tiga bagian, yakni: *conceptual-embodied world* (dunia perwujudan)*, proceptual-symbolic world* (dunia simbolik)*,* dan *axiomatic-formal world* (dunia formal) (Tall. 2005).

Conceptual-embodied world adalah dunia perwujudan konsep berdasarkan persepsi dan refleksi. Mahasiswa memikirkan konsep dengan cara memulai dari hal-hal yang bisa dirasakan secara fisik dan juga secara mental. *Proceptual-symbolic world* merupakan dunia simbolik yang dapat tumbuh melalui aksi ketika melakukan perhitungan dan symbol sebagai konsep yang sedang dipikirkan. Keduanya saling terkait karena proses merupakan aktivitas ketika melakukan sesuatu dan konsep merupakan obyek yang sedang dipikirkan, sehingga keduanya disebut sebagai procept (*process and concept*). *Axiomatic-formal world* merupakan dunia formal aksiomatik yang berupa pengetahuan mahasiswa berdasarkan aksioma, teorema, dan juga definisi dari suatu obyek formal. Oleh karena itu, investigasi terhadap struktur argumen mahasiswa ketika melakukan pembuktian aljabar dianalisis dengan menggunakan indikator yang ada pada Tabel 9.1.

Tabel 9.1. Investigasi Struktur Argumen

Tiga Dunia Matematika	**Deskripsi**
conceptual-embodied world	• Memahami fenomena yang dirasakan untuk menggali informasi yang terkait dengan data dan klaim • Mengidentifikasi data dan klaim melalui persepsi dan refleksi
Proceptual-symbolic world	• Menentukan aturan matematika sebagai konsep yang dapat menghubungkan data dan klaim. • Melakukan perhitungan atau operasi aljabar berdasarkan konsep yang sedang dipikirkan
Axiomatic-formal world	• Melakukan perhitungan dengan menggunakan symbol yang terkait dengan definisi, aksioma, atau teorema yang terdapat pada konsep • Jika konsep yang digunakan tidak cukup kuat untuk menghubungkan data dan klaim, maka dapat muncul penyangkal (*rebuttal*).

D. Invers Matriks dalam Aljabar Linier Elementer

Aljabar merupakan mata kuliah yang diajarkan kepada mahasiswa jurusan matematika. Mata kuliah aljabar dibagi menjadi dua, yakni aljabar linier elementer dan aljabar abstrak. Dalam hal ini menggunakan mata kuliah aljabar linier elementer karena mata kuliah ini memuat masalah pembuktian yang bersifat abstrak, tetapi sudah diajarkan kepada mahasiswa pada semester dua. Aljabar linier elementer menjadi mata kuliah wajib yang diajarkan kepada mahasiswa prodi pendidikan matematika universitas hasyim asy'ari, sehingga mahasiswa dituntut mampu berpikir secara analitis agar dapat melakukan pembuktian secara formal. Akan tetapi, masih banyak mahasiswa yang belum mampu melakukan pembuktian secara formal karena mereka masih pemula.

Salah satu pokok bahasan dalam aljabar linier elementer adalah invers suatu matriks. Pada invers memuat matriks identitas yang berupa angka 1 pada diagonal utama dan angka 0 pada entri selain diagonal utama, sedemikian hingga: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan seterusnya.}$$

Matriks-matriks di atas disebut sebagai matriks identitas dan dinyatakan dengan I. Identitas dari matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ dapat dituliskan dalam bentuk I_n. Matriks identitas memiliki peran yang sama dalam artimatika matriks, seperti bilangan 1 yang berperan dalam hubungan numerik $a.1 = 1.a = a$.

Teorema berikut ini menunjukkan matriks-matriks identitas yang muncul secara alami dalam pembahasan matriks bujur sangkar berbentuk eselon baris tereduksi (Anton, 2014).

Teorema:
Jika R adalah sebuah $n \times n$ dari matriks A berbentuk eselon baris tereduksi, maka R mempunyai sebuah baris nol atau R merupakan matriks identitas I_n.

Bukti:
Anggap bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ . & . & . \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

Baik baris terakhir dalam matriks ini seluruhnya terdiri dari nol maupun tidak. Jika tidak, maka matriks tersebut tidak mempunyai baris-baris nol, sehingga masing-masing n baris mempunyai entri utama 1. Karena utama 1 ini terletak makin ke kanan ketika kita bergerak turun dalam matriks tersebut maka angka 1 terdapat pada setiap diagonal utama dan elemen-elemen yang lain adalah 0. Oleh karena itu, R pastilah I_n. Jadi R mempunyai sebuah baris nol atau $R = I_n$

Selanjutnya, untuk invers suatu matriks mempunyai definisi sebagai berikut:
Definisi:
"Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, dan jika sebuah matriks B yang berukuran sama dapat ditentukan sedemikian hingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik dan B disebut invers dari A"

Teorema:
Jika B dan C keduanya adalah invers matriks A, maka $B = C$
Bukti:
Karena B adalah invers dari A, maka $BA = I$. Mengalikan kedua ruas pada sisi kanan dengan C memberikan $(BA)C = IC = C$. Akan tetapi $(BA)C = B(AC) = BI = B$ sehingga $C = B$.

Sebagai konsekuensi dari hasil yang penting ini, kita sekarang dapat mengatakan bahwa jika A dapat dibalik, maka inversnya akan dinyatakan dengan simbol A^{-1}. Jadi $AA^{-1} = I$ dan $A^{-1}A = I$.

Invers dari A memainkan peran yang sama dalam aritmatika matriks seperti peran yang dimainkan oleh a^{-1} dalam hubungan numerik aa^{-1} dan $a^{-1}a = 1$.

Teorema*:*

Matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dikatakan dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$, dimana inversnya dapat dicari dengan menggunakan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

Bukti:

Pembuktian pada teorema ini diserahkan kepada pembaca sebagai latihan agar dapat memeriksa $AA^{-1} = I$ dan $A^{-1}A = I$.

Teorema*:*

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan berukuran sama, maka:

a. AB dapat dibalik
b. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bukti:

Jika kita dapat menunjukkan bahwa $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ maka secara simultan telah menunjukkan bahwa matriks AB dapat dibalik dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Akan tetapi, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. Sebuah pendapat serupa juga menunjukkan bahwa $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$

Catatan:

Suatu hasil kali berapapun banyaknya matriks yang dapat dibalik adalah matriks yang dapat dibalik, dan invers dari hasil kali tersebut adalah hasil kali invers-inversnya dalam urutan yang terbalik.

<u>Pangkat suatu matriks</u>

Definisi*:*

"Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka kita definisikan pangkat bulat tak negatif dari matriks A dengan:

$$A^0 = I, A^n = \underbrace{AA \ldots A}_{n \text{ faktor}}, (n > 0)$$

Lebih jauh, jika A dapat dibalik, maka kita definisikan pangkat bulat negatif sebagai:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n \text{ faktor}}$$

Teorema*:*

Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar dan r dan s adalah bilangan bulat, maka:

$$A^r A^s = A^{r+s}, (A^r)^s = A^{rs}$$

Sedangkan teorema berikut ini memberikan sifat berguna dari pangkat negatif.

Teorema*:*

Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik atau mempunyai invers, maka:

a. A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$
b. A^n dapat dibalik dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ untuk n = 0, 1, 2, …

c. Untuk sebarang skalar tak nol k, matriks KA dapat dibalik atau mempunyai invers yang berbentuk $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

Bukti:

a. Karena $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, matriks A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$
b. Bagian ini dibuktikan sendiri sebagai latihan mahasiswa
c. Jika k adalah scalar tak nol, maka dapat diperoleh:

$$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \frac{1}{k}(kA)A^{-1} = \left(\frac{1}{k}k\right)AA^{-1} = 1.I = I$$

Penulis memberikan satu soal kepada mahasiswa untuk mengeksplorasi struktur arumen mereka dalam pembuktian aljabar. Dalam hal ini penulis memberikan tes pembuktian matematika yang terkait dengan invers suatu matriks kepada mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika semester 2 pada mata kuliah Aljabar Linier Elementer. Adapun tes yang diberikan kepada mahasiswa adalah sebegai berikut:

Buktikan kebenaran pernyataan di bawah ini:
"Tunjukkan bahwa jika sebuah matriks bujur sangkar A memenuhi $A^2 - 3A + I = 0$ maka $A^{-1} = 3I - A$!"

BAB 10
ARGUMEN MAHASISWA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Investigasi terhadap struktur argumen mahasiswa dalam pembuktian aljabar dapat dilihat dari kemampuan matematika tinggi, sedang, dan rendah. Kriteria kemampuan mahasiswa tinggi, sedang, dan rendah ditentukan berdasarkan hasil belajar mahasiswa selama mengikuti perkuliahan aljabar linier elementer seperti pada Tabel 10.1.

Tabel 10.1. Rentang Skor Hasil Belajara

Skor Hasil Belajar	Kriteria
$76 \leq x \leq 100$	Tinggi
$75 \leq x \leq 46$	Sedang
$45 \leq x \leq 20$	Rendah

Struktur argumen mahasiswa dari masing-masing kemampuan matematika tersebut dapat diketahui dari perwakilan salah satu mahasiswa. Perwakilan mahasiswa dengan kemampuan matematika tinggi diberi kode ST. Perwakilan mahasiswa dengan kemampuan matematika sedang diberi kode SD, dan perwakilan mahasiswa dengan kemampuan matematika rendah diberi kode SR. Adapun paparan dari hasil investigasi struktur argumen masing-masing mahasiswa adalah sebagai berikut:

A. Mahasiswa dengan Kemampuan Matematika Tinggi

Dari hasil penelitian kepada ST diperoleh temuan bahwa ST memahami fenomena matematika yang terdapat pada instrument tes dengan cara mengidentifikasi data dan klaim yang akan dibuktikan. Dia menyebutkan bahwa pada pernyataan tersebut memuat dua persamaan yang bersifat sama karena mempunyai syarat jika A memenuhi persamaan kedua, maka A juga memenuhi persamaan pertama. Persamaan pertama berbentuk $A^{-1} = 3I - A$ dan persamaan kedua berupa $A^2 - 3A + I = 0$. Subjek menganggap bahwa pembuktian dapat dilakukan dengan menggunakan salah satu persamaan karena kedua persamaan sama-sama memuat I sebagai matriks identitas. Jika membuktikan persamaan pertama maka hasilnya sama dengan persamaan kedua, begitupun sebaliknya. Dalam hal ini subjek memilih membuktikan persamaan kedua seperti pada transkrip wawancara berikut:

P : *Bagaimana cara anda memahami pernyataan yang akan anda buktikan? Apakah langsung membuktikan begitu saja?*

ST : *Oh tidak bu… saya mengamati dulu persamaan apa saja yang ada dalam pernyataan tersebut*

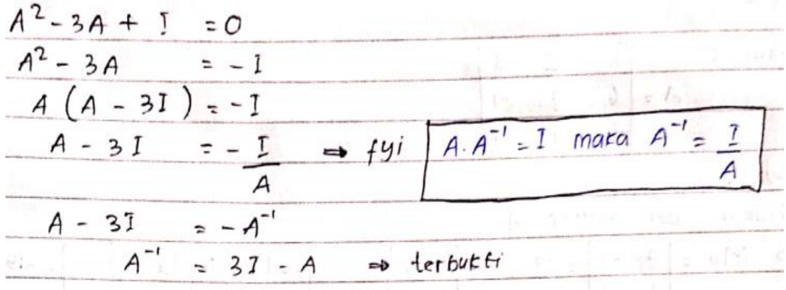
P : *Maksudnya?*

ST : *Maksudnya begini bu… di soal itu kan ada dua persamaan… terus saya disuruh menunjukkan bahwa* $A^{-1} = 3I - A$ *itu sama dengan* $A^2 - 3A + I = 0$ *dengan syarat jika A memenuhi persamaan kedua, maka A jugamemenuhi persamaan pertama. Kemudian saya membuktikannya dari persamaan kedua yang berupa* $A^2 - 3A + I = 0$

Selanjutnya subjek melakukan operasi aljabar dengan menggunakan konsep matriks identitas yang berupa "sebuah matriks identitas memiliki peran yang sama dalam aritmatika matriks, misalkan sebuah skalar a yang berperan dalam hubungan numerik $a.I = I.a = a$". Subjek menggunakan konsep matriks identitas tersebut untuk mendapatkan $3.I = 3$ agar diperoleh $A(A - 3I) = -I$.

Subjek juga melakukan operasi aljabar pada langkah berikutnya dengan menggunakan konsep invers pada bilangan real yang berupa "jika $A.A^{-1} = I$ maka $A^{-1} = \frac{I}{A}$". Padahal jika ditelusuri, maka konsep pada bilangan real tersebut tidak sesuai jika diterpakan dalam matriks karena tidak ada operasi pembagian pada sifat-sifat operasi matriks. Munculnya konsep invers pada bilanga real dikarenakan subjek menggunakan pengetahuan secara intuitif. Subjek secara tidak sadar menganggap bahwa konsep invers pada matriks sama dengan invers pada bilangan real.

P	:	*Itu kenapa bisa muncul* $-3I = -\frac{I}{A}$
ST	:	*Iya bu. Ini saya menggunakan konsep invers untuk mendapatkan* $A^{-1} = \frac{I}{A}$
P	:	*Apakah anda pernah menemui teorema atau sifat operasi pembagian pada matriks?*
ST	:	*Kalau saya baca di buku tidak ada teorema, aksioma, atau definisi yang mengatakan terdapat operasi pembagian matriks bu*
P	:	*La terus itu kok anda bisa menuliskan* $A^{-1} = \frac{I}{A}$
ST	:	*Ini tadi saya ragu-ragu bu, karena saya mengira kalau invers pada matriks sama dengan invers perkalian bilangan real seperti biasanya, ternyata kalau dalam matriks berbeda*



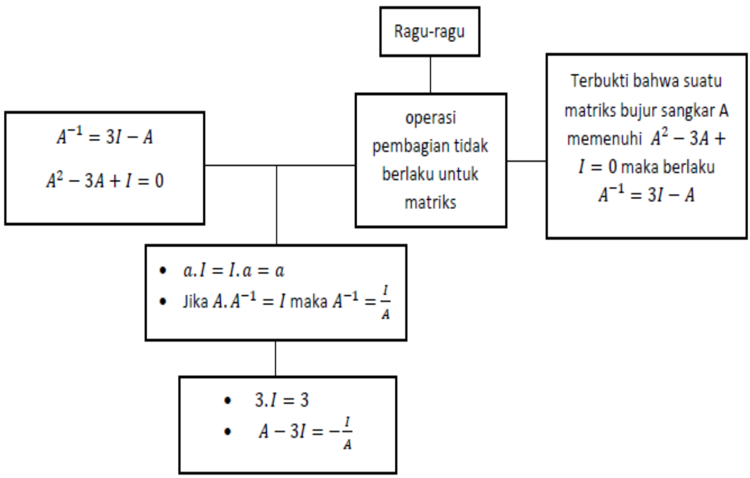
$$A^2 - 3A + I = 0$$
$$A^2 - 3A = -I$$
$$A(A - 3I) = -I$$
$$A - 3I = -\frac{I}{A} \Rightarrow fyi \ \boxed{A \cdot A^{-1} = I \text{ maka } A^{-1} = \frac{I}{A}}$$
$$A - 3I = -A^{-1}$$
$$A^{-1} = 3I - A \Rightarrow \text{terbukti}$$

Gambar 10.1. Hasil Pembuktian ST

Dari hasil eksplorasi kepada ST dapat diketahui bahwa ia menggunakan aturan matematika yang berupa konsep matriks identitas, invers matriks, dan matriks skalar sebagai penjamin (*warrant*) untuk menguraikan setiap langkah pembuktian agar diperoleh argumen yang valid. Akan tetapi, ST menggunakan pengetahuan yang tidak tepat tentang invers suatu matriks karena dia menggunakan konsep operasi pembagian pada bilangan real untuk menentukan A^{-1}. Subjek dengan kemampuan matematika tinggi menggunakan pengetahuannya tentang "jika $A.A^{-1} = I$ maka $A^{-1} = \frac{I}{A}$" untuk mendapatkan kesimpulan yang berupa "terbukti bahwa suatu matriks bujur sangkar A memenuhi $A^2 - 3A + I = 0$ maka berlaku $A^{-1} = 3I - A$". Akan tetapi pada saat wawancara subjek mengatakan bahwa dia ragu ketika menggunakan konsep pembagian bilangan real untuk menentukan $A^{-1} = \frac{I}{A}$ karena dia tidak pernah menemui teorema atau definisi yang menyatakan bahwa operasi pembagian juga berlaku pada matriks.

Jika dilihat dari kesimpulan yang diberikan oleh ST maka kesimpulannya benar, tetapi langkah-langkah pembuktian yang dilakukan ST mengalami sedikit kesalahan karena dia menggunakan $A^{-1} = \frac{I}{A}$ untuk mendapatkan $A^{-1} = 3I - A$. Dalam hal ini, ST memunculkan *rebuttal* untuk menyangkal argumennya sendiri tentang operasi pembagian tidak berlaku untuk matriks. Rebuttal muncul karena subjek merasa ragu dengan argumen yang telah terbentuk ketika melakukan pembuktian.erisi tentang informasi dasar dari bab ini yang ingin disampaikan oleh penulis bagi para pembacanya.

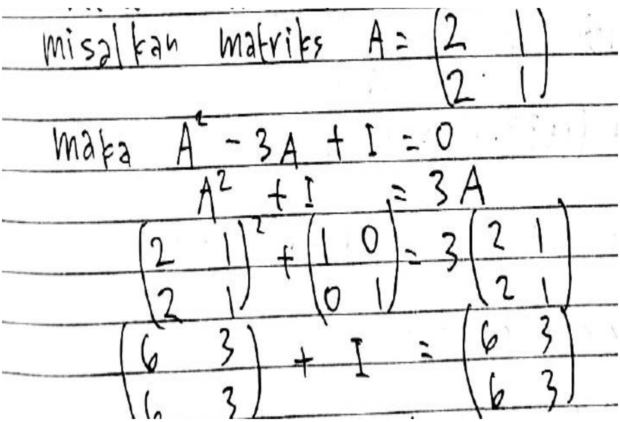
Adapun struktur argumen dari mahasiswa dengan kemampuan matematika tinggi dapat dilihat pada Gambar 10.2.



Gambar 10.2. Struktur Argumen Matematis dari ST

B. Mahasiswa dengan Kemampuan Matematika Sedang

Selanjutnya adalah hasil eksplorasi kepada subjek dengan kemampuan matematika sedang. Penulis memberi kode SS untuk subjek yang memiliki kemampuan matematika sedang. Dari hasil eksplorasi kepada SS diperoleh temuan bahwa SS menyelesaikan tes dengan cara memahami fenomena yang terdapat pada soal terlebih dahulu. SS memahami pernyataan yang terdapat pada instrument tes tentang matriks bujur sangkar A yang memenuhi $A^2 - 3A + I = 0$ maka matriks bujur sangkar A juga memenuhi $A^{-1} - 1 = 3I - A$. Subjek mengidentifikasi data dan klaim dengan cara mengklasifikasikan menjadi beberapa fenomena yakni, matriks bujur sangkar A, matriks A^{-1} dan matriks identitas. Subjek memisalkan matriks bujur sangkar dalam bentuk $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ agar mudah disubstitusikan ke $A^2 - 3A + I = 0$, sedangkan untuk A^{-1} dapat dicari dengan menggunakan adjoin (adj) dan untuk matriks identitas menggunakan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Subjek terlebih dahulu mensubstitusikan pemisalannya ke bentuk $A^2 - 3A + I = 0$ sehingga diperoleh $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ seperti pada Gambar 10.3.

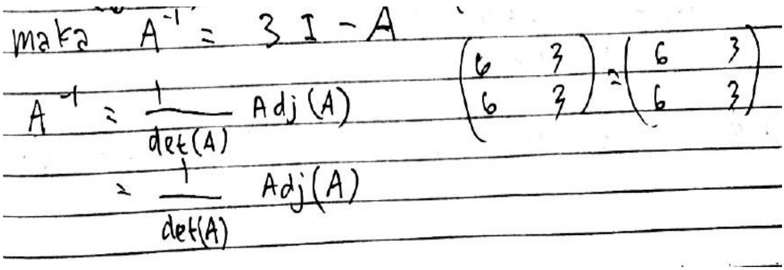


Gambar 10.3. Hasil Pembuktian SS

P : *Kenapa anda menggunakan adjoin untuk menentukan A^{-1}?*

SS	:	*Iya bu, karena dalam konsep invers terdapat teorema yang menggunakan determinan dan adjoin dari suatu matriks bujur sangkar A. jadi saya menggunakan teorema tersebut untuk membuktikan* $A^{-1} - 1 = 3I - A$
P	:	*Oh... ok. Terus hasilnya bagaimana. apakah terbukti?*
SS	:	*Tidak bu. Di situ* A^{-1} *tidak bisa ditemukan karena* $\frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{0}$. *Saya tadi juga melakukan kesalahan saat mensubstitusikan hasil pemisalan saya* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, *ternyata hasilnya* $A^2 + I \neq 3A$. *Tapi tadi saya tulis sama*
P	:	*Terus kesimpulan apa yang bisa anda peroleh?*
SS	:	*Saya tidak bisa memberikan kesimpulan bu karena langkah-langkah pembuktian saya sejak awal sudah salah*

Setelah itu subjek mencari A^{-1} dengan menggunakan teorema yang berupa “jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik (invers), maka $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj\ (A)$”. Kemudian subjek mensubstitusikan matriks bujur sangkar $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ke teorema tersebut. Dari hasil substitusi, subjek memperoleh $A^{-1} = \frac{1}{0} adj\ (A)$, sehingga dia memberikan klaim bahwa A^{-1} tidak bisa ditemukan karena $\det(A) = \frac{1}{0}$.

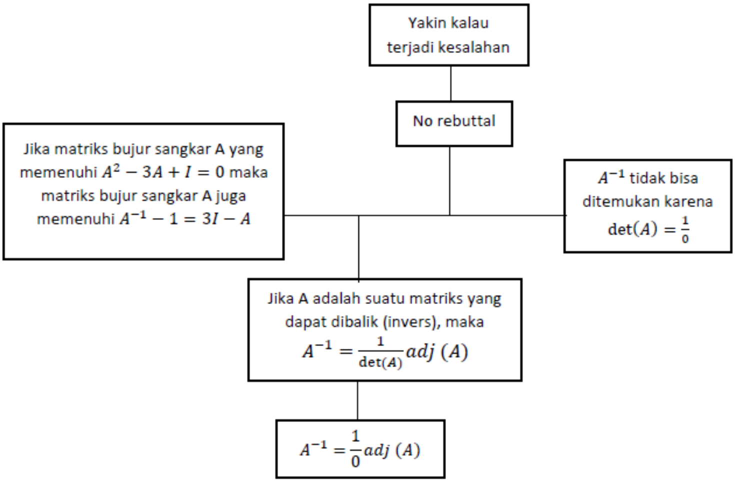


Gambar 10.4. Lanjutan dari Hasil Pembuktian SS

Dari hasil pembuktiannya tersebut, subjek tidak bisa melanjutkan ke langkah pembuktian selanjutnya karena dia memiliki persepsi kalau langkah-langkah pembuktiannya salah. Subjek mengatakan bahwa kesalahannya terjadi ketika mensubstitusikan hasil pemisalannya ke bentuk $A^2 - 3A + I = 0$ (Gambar 3.5), sehingga dia tidak bisa memberikan kesimpulan dari hasil pembuktiannya.

Dari hasil eksplorasi yang peneliti lakukan kepada SS diperoleh temuan bahwa SS mengidentifikasi data dan klaim terlebih dahulu kemudian mengklasifikasikan menjadi tiga bagian. SS menggunakan aturan matematika yang berupa teorema tentang adjoin (adj) sebagai dasar untuk menguraikan pembuktian agar diperoleh argumen yang valid, akan tetapi subjek mengalami kesalahan sehingga tidak bisa memberikan kesimpulan dari hasil pembuktiannya. Aturan matematika yang berupa teorema dapat dikatakan sebagai *warrant* atau penjamin dari suatu argumen, kemudian didukung oleh *backing* yang berupa substitusi matriks bujur sangkar A ke dalam teorema.

Adapun struktur argumen mahasiswa dengan kemampuan matematika sedang ketika menyelesaikan pembuktian dapat disajikan pada Gambar 10.5.



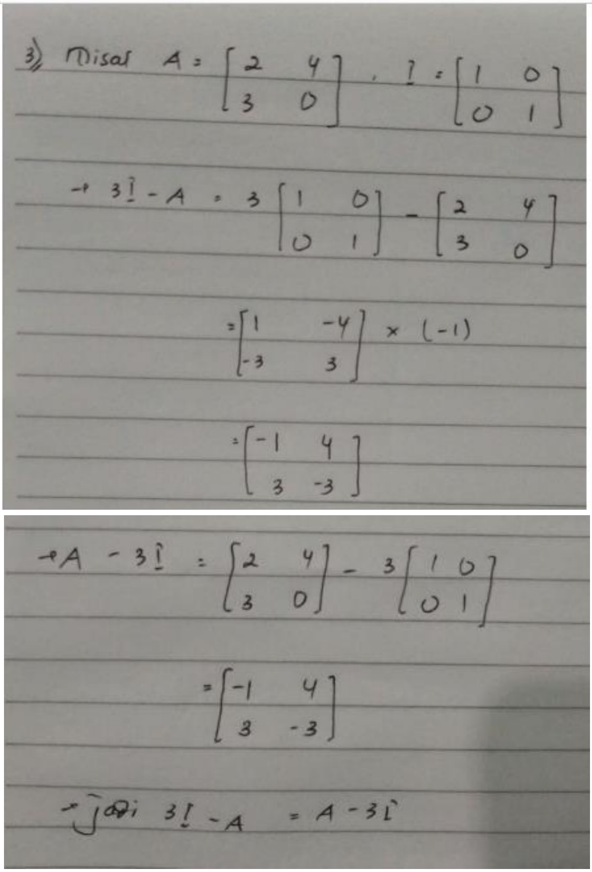
Gambar 10.5. Struktur Argumen Matematis dari SS

C. Mahasiswa dengan Kemampuan Matematika Rendah

Terakhir, penulis memberi kode SR untuk subjek yang memiliki kemampuan matematika rendah. SR hanya memberikan *warrant* secara implisit karena SR hanya mengatakan kalau "invers adalah kebalikan". SR memahami dengan cara mengidentifikasi pernyataan yang memuat matriks bujur sangkar A yang memenuhi $A^2 - 3A + I = 0$. Subjek memisalkan matriks bujur sangkar $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ dan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sebagai matriks identitas.

Setelah itu SR melakukan perhitungan dengan cara mensubstitusikan hasil pemisalannya ke $3I - A$ dan $A - 3I$.

Dalam hal ini SR memunculkan $A - 3I$ padahal dalam instrumen tes tidak menyebutkan $A - 3I$ sama sekali. SR dapat memunculkan $A - 3I$ karena dia memahami kalau invers adalah kebalikan, sehingga kebalikan dari $A^{-1} = 3I - A$ adalah $A^{-1} = A - 3I$. Dari hasil substitusi, subjek memperoleh $3I - A = A - 3I$.



Gambar 10.6. Hasil Pembuktian SR

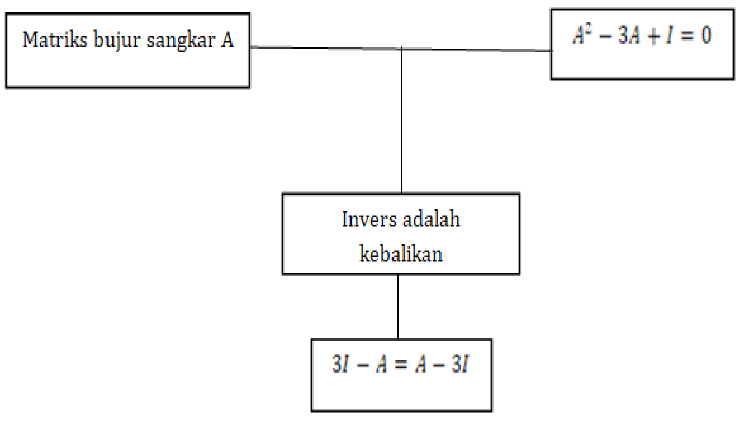
P : *Dari mana anda memperoleh A-3I?*

SR : *saya memperoleh A-3I dari inversnya 3I-A.*

P : *maksudnya?*

SR : *karena invers adalah kebalikan, maka saya lansgung membalik A-3I menjadi 3I-A*

SR melakukan perhitungan tanpa memperhatikan hasil identifikasi masalah di awal. Pada saat identifikasi masalah, SR tidak menyebutkan $A - 3I$ sama sekali tetapi ketika melakukan perhitungan SR menggunakan $3I - A$ dan $A - 3I$. Hal ini karena SR hanya berpedoman pada $A^{-1} = 3I - A$ untuk melakukan pembuktian, subjek tidak memperhatikan $A^2 - 3A + I = 0$. SR tidak melakukan operasi aljabar untuk menguraikan pembuktian. SR juga tidak menggunakan *warrant* dan *backing* sebagai penjamin karena SR hanya melakukan operasi pada matriks bujur sangkar A untuk memperoleh $3I - A = A - 3I$.



Gambar 10.7. Struktur Argumen Matematis dari SR

Dari ketiga subjek tersebut, dapat diketahui bahwa struktur argumen yang dibangun tidak jauh berbeda. Ketiga subjek mengidentifikasi data dan klaim terlebih dahulu kemudian menentukan warrant atau penjamin yang akan di gunakan sebagai dasar untuk menguraikan suatu pembuktian. Akan tetapi, terdapat perbedaan isi teorema yang digunakan oleh masing-masing subjek.

ST menggunakan penjamin berupa invers matriks yang memuat identitas matriks, SS menggunakan adjoin, dan subjek ketiga tidak menggunakan. SR hanya menyampaikan bahwa invers adalah kebalikan, sehingga berlaku $3I - A = A - 3I$.

D. Pembahasan

Berdasarkan hasil eksplorasi kepada mahasiswa dapat diketahui tentang struktur argumen yang dibangun oleh mahasiswa pada saat melakukan pembuktian aljabar. Mahasiswa dapat membangun struktur argumen dalam melakukan pembuktian aljabar melalui proses berpikir matematis yang dilakukan.

Investigasi kepada masing-masing subjek penelitian dapat diketahui bahwa identifikasi merupakan langkah awal yang perlu dilakukan oleh mahasiswa dalam memahami suatu permasalahan matematika (Astawa dkk., 2018; Faizah et al., 2020).

Mahasiswa melakukan identifikasi masalah dengan cara mengklasifikasikan menjadi beberapa obyek untuk mengetahui data dan klaim yang akan dibuktikan. Mahasiswa menggunakan pengetahuan atau pengalaman yang dimiliki terkait konsep matematika yang akan digunakan untuk membuktikan (Tall, 2008). Dalam konteks penelitian ini, mahasiswa menggunakan konsep skalar pada matriks, invers matriks, matriks identitas dan juga adjoin matriks.

Penggunaan teorema tentang invers matriks dan konsep perkalian skalar dengan matriks merupakan aturan yang dapat dijadikan dasar untuk menguraikan suatu pembuktian. Aturan merupakan *warrant* dan *backing* yang dapat dijadikan penjamin untuk mendapatkan kesimpulan dari data dan klaim (Freeman, 2005; Metaxas dkk., 2016).

Warrant dalam suatu argumen juga dapat berupa definisi atau analogi terhadap suatu konsep matematika (Nardi et al., 2014). Ketika mahasiswa merasa ragu dengan aturan matematika yang digunakan, maka keraguran tersebut dapat dikatakan sebagai *rebuttal* karena ia merasa konsep yang sudah digunakan tidak tepat (Lambert & Bleicher, 2017). *Rebuttal* tidak selalu muncul dalam pembuktian matematika (Weber & Alcock, 2005). Hal ini dikarenakan tidak semua pembuktian matematika memerlukan penyangkal. Keyakinan mahasiswa terhadap hasil pembuktian matematika dapat ditunjukkan dengan adanya *qualifier* sebagai justifikasi dari hasil pembuktian (Wagner et al., 2013; Inglis dkk, 2007).

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya dapat diketahui bahwa struktur argumen matematis terkait erat dengan proses berpikir mahasiswa. Hal ini disebabkan mahasiswa membentuk struktur argumen melalui tahapan-tahapan berpikir matematis yang terjadi saat proses penyelesaian masalah matematika. Kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan masalah matematika dapat diketahui pada saat proses pembelajaran.

BAB 11
SIMPULAN

Hasil kajian pada bab-bab sebelumnya menunjukkan bahwa setiap teori belajar dapat diimplementasikan pada pembelajaran matematika. Teori behavioristik menekankan pada hasil yang diperoleh siswa ketika mendapatkan stimulus dari guru. Kemudian pada teori perkembangan kognitif memuat tahap perkembangan seseorang mulai dari usia 0 tahun sampai dengan usia dewasa. Teori perkembangan kognitif ditemukan oleh Piaget dan Bruner, keduanya juga merupakan pencetus teori konstruktivistik yang berfungsi untuk mengetahui proses berpikir siswa ketika membangun pengetahuan baru. Menurut Piaget pengetahuan baru dapat dibangun melalui proses asimilasi, akomodasi, dan equilibrasi.

Teori sosiokultural membahas tentang proses membangun pengetahuan baru melalui interaksi dengan orang sekitar yang lebih paham. Sedangkan pada teori pemrosesan informasi menyebutkan bahwa ketika seseorang menerima informasi baru akan diproses di otak kemudian masuk ke dalam memori jangka panjang (long term memory) atau memori jangka pendek (short term memory). Pada teori APOS menyebutkan bahwa seseorang dapat memperoleh pengetahuan baru melalui Aksi, Proses, Objek, dan Skema.

Selain beberapa teori tersebut, dalam teori belajar juga terdapat teori tiga dunia matematika dari David Tall. Teori ini sangat mendukung proses pembelajaran matematika karena tidak hanya menekankan pada hasil, tetapi juga menekankan pada kemampuan siswa agar bisa berpikir secara konkrit maupun abstrak. Kemampuan mahasiswa calon guru matematika dalam melakukan berpikir secara asbtrak dapat diketahui melalui argument.

Argument dalam pembelajaran matematika tidak hanya berupa alasan biasa saja, tetapi juga berupa bukti yang didasarkan pada konsep-konsep sebelumnya. Konsep-konsep tersebut dapat berupa definisi, aksioma, atau teorema sebelumnya yang sudah pernah dibuktikan kebenarannya.

DAFTAR PUSTAKA

Aberdein, A. (2006). The Uses of Argument Mathematics. Argumentation, 19: 287– 288. *Springer*.

Abtahi, Yasmine. (2017). Pupil, Tool and Zone of Proximal Development. *Research in Mathematics Education*

Ahmadi, Abu Ahmadi & Munawar Sholeh. (2005). *Psikologi Perkembangan*. Jakarta: Rineka Cipta

Anton, H. & Rorre, C., (2014). Elementary Linear Algebra 11th edition. United State of America: Wiley

Astawa, I. W. P., Budayasa, I. K., & Juniati, D. (2018). The Process of Student Cognition in Constructing Mathematical Conjeture. *Journal on Mathematics Education*, 9(10, 15-26

Baharuddin & Esa Nur Nasution. (2011). *Teori Belajar dan Pembelajaran*. Jakarta: Ar-Ruzz Media

Bartle, R.G. & Sherbert, D.R. (2000). *Introduction to Real Analysis*. Library of Congress Catalonging in Publication: USA.

Banegas, J.A. (2013). Argumentation in Mathematics. *The Argument of Mathematics*. University de Valencia.

Benison, Anne. (2016). Identity as an Embedder of Numeracy: Numeracy and Teaching Science Out of Field. *AARE Conference*

Bizup, J. (2009). The Uses of Toulmin in Composition Studies. *College Composition and Communication*, *61*(1), 1–23.

Blanton, M. L., & kaput, J. J. (2005). Characterizing a Classroom Practice than Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 36 No. 5, 412-446

Bleiler, S. K., Thompson, D. R., & Krajčevski, M. (2014). Providing Written Feedback on Students' Mathematical Arguments: Proof Validations of Prospective Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(2), 105–127.

Brenner, Mary E. 1998. Development of Mathematical Communication in Problem Solving Groups by Language Minority Students. *Bilingual Research Journal*

Dimyati dan Muljiono. (2006). *Belajar dan Pembelajaran*. Jakarta: Rineka Cipta.

Dubinsky. 2000. *Using a Theory of Learning in College Mathematics Courses*.

Ekawati. Mona. (2019). Teori Belajar Menurut Aliran Psikologi Kognitif serta Implikasinya dalam Proses Belajar dan Pembelajaran*. E-Tech*. Vol. 07 Np. IV.

Faizah, S., Nusantara, T., Sudirman, & Rahardi, R. (2020a). The Construction of Explicit Warrant Derived from Implicit Warrant in Mathematical Proof. *AIP Conference Proceedings*, *2215*(April).

Faizah, S., Nusantara, T., Sudirman, S., & Rahardi, R. (2020b). Exploring Students ' Thinking Process in Mathematical Proof of Abstract Algebra based on Mason's Framework. *Journal for the Education of Gifted Young Scienstist*. *8*(02), 871–884.

Faizah, S., Amalia, A. K., Raharjo, R.P., Fadli, R. I., & Fajarina, M. (2020c). *Pentingnya Belajar Membaca Simbol Matematika*. Jombang: LPPM Unhasy.

Freeman, J.B. (2005). Systematizing Toulmin's *Warrant*s : An Epistemic Approach. *OSSA Conference Archive, 16*.

Fuentes, S. Q. (2013). Fostering Communication between Students Working Collaboratively: Results from a

Practitioner Action Research Study. *Mathematics teacher Education and Development*, 15(1) 48-71.

Hill, Winfred F. (2011). *Theories of Learning (Teori-teori dalam Pembelajaran, Konsepsi, Komparasi, dan Signifikan)*. Bandung: Nusa Media.

Inglis, M, Ramos, J.P, & Simpson, A. (2007) Modelling Mathematical Argumentation : The Importance of Qualification. *Loughborough ' s Institutional Repository*. 66(1), 3–21.

Kalyuga, Slava. (2009). *Cognitive Load Factors in Instructional Design for Advanced Learners*. New York: Nova Science Publisher

Knight, A. M., Katherine. (2015). Comparing Students' Individual Written and Collaborative Oral Socioscientific Arguments. *International Journal of Environment & Science Education*, 10(5), 625-647

Kusaeri. 2015. Terbentuknya Konsepsi Matematika pada Diri Anak dari Perspektif Teori Reifikasi dan APOS. *Jurnal Pendidikan Matematika*. Vol. I, No. 2. 101-105

Lamb, Janeen. (2011). Reform in Mathematics: The Principle's Zone of Promote Action. *Australian Catholic Universitys*

Lambert, J. L. & Bleicher, R. E. (2017). Argumentation as a Strategy for Increasing Preservice Teachers' Understanding of Climate Change, a Key Global Socioscientific Issue. *International Journal of Education in Mathematics Science and Technology (IJEMST)*, 5(2), 101-112.

Leron, U., & Hazzan, O. (2009). Intuitive vs Analytical Thinking: Four Perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 263–278.

Mason, J. (2005). Framework for Learning, Teaching and Research: Theory and Practice. *Proseding of PME-NA*

Metaxas, N., Potari, D., & Zachariades, T. (2016). Analysis of a Teacher's Pedagogical Arguments Using Toulmin's Model and Argumentation Schemes. *Educational Studies in Mathematics*. 93(3). 383–397.

Morash, R.P. (1987). *Bridge to Abstract Mathematics (Mathematical Proof and Structure)*. Library of Congress Cataloging: United States of America

Mulyono. 2011. Teori APOS dan Implementasinya dalam Pembelajaran. *JMEE*. Vol. 1 No. 1. 37-45

Nardi, E., Biza, I., & Watson, S. (2014). What Makes a Claim an Acceptable Mathematical Argument in the Secondary Classroom? A Preliminary Analysis of Teachers' *Warrant*s In The Context of an Algebra Task. *Procedings of the 8th British Congress of Mathematics Education.* 247–254.

Netti, S., Nusantara, T., Subanji, Abadyo, & Anwar, L. (2016). The Failure to Construct Proof Based on Assimilation and Accomodation Framework from Piaget. *International Education Studies*, 9(12), 12-22

Nuhrenborger, Marcus and Heinz Steinbring. (2009). From of Mathematical Interaction in Different Social Settings: examples from students', teachers', and teacher-students' communication about mathematics. *Springer Science+Bussiness Media B.V: J Math Teacher Educ*, 12. 111-132

Nur, Muhammad, Wikandari, Prima Retno., & Sugiarto, Bambang. (1999). *Teori Belajar*. Surabaya: University Press Universitas Negeri Surabaya

Purwanto, Ngalim. (2004). *Psikologi Pendidikan*. Bandung: PT. Remaja Rosdakarya

Putrayasa, Ida Bagus. (2013). *Landasan Pembelajaran*. Bali: Undiksha Press

Rossi, R.J. (2006). *Theorems, Corollaries, Lemmas, and Methods of Proof*. Wiley Interscience: Canada

Rusou, Z., Zakay, D., & Usher, M. (2013). Pitting Intuitive and Analytical Thinking Against Each Other: The Case of Transitivity. *Psychonomic Bulletin and Review*. Springer. *20*(3), 608–614.

Santrock, John W. 2004. *Life-Span Development, Ninth Edition*. New York: McGraw-Hill

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether An Argument Proves A Theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 4–36.

Sfard, A. 1991. On the Dual Nature of Mathematics Conceptions: Reflections on Process and Objects as Different Side of the Same Coin*. Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Simpson, A. (2015). The anatomy of a mathematical proof: Implications for analyses with Toulmin's scheme. *Educational Studies in Mathematics*, 90(1), 1–17.

Slavin, R., (1994). *Educational Psychology, Theory and Practice*. Allyn and Bacon, Massachussets.

Slavin, R.E. (2000). *Educational Psychology: Theory and Practice*. Massachusetts: Allyn and Bacon.

Slavin, R.E. (2011). *Educational Psycology: Theory and Practice.* America: The United States of America.

Subanji. (2011). *Teori Berpikir Pseudo Penalaran Kovarisional.* Malang: Universitas Negeri Malang.

Sutarto. (2017). Teori Kognitif dan Implikasinya dalam Pembelajaran. *Islamic Counseling*. Vol. 01 No. 02 STAIN Curup.

Syah, Muhibbin. (2010). *Psikologi Pendidikan: Suatu Pendekatan Baru*. Bandung: Remaja Rosdakarya.

Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics, *20*(2), 5–24. University of Warwick, UK

Thaneerananon, T., Triampo, W., & Nokkaew, A. (2016). Development of a Test to Evaluate Students' Analytical Thinking Based on Fact versus Opinion Differentiation. *International Journal of Instruction*, *9*(2), 123–138.

Varghese, T. (2009). Secondary-level Student Teachers' Conceptions of Mathematical Proof. *IUMPST: The Journal*. 1–14.

Wagner, P.A., Smith, R.C., Conner, A.M, Francisco, R.T., & Singletary, L. (2013). Using Toulmin's Model to Develop Prospective Teachers' Conceptions of Collective Argumentation. *Teacher Education and Knowledge: Research Report.* Procedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 725–732.

Walshaw, Margaret. (2017). *Understanding Mathematical Development Through Vygotsky*. Routledge. New Zealand: Research in Mathematics Education

Walton, D., Christopher W., & Tindale, (2014). Applying Recent Argumentation Methods to Some Ancient Examples of Plausible Reasoning. *Springer*. 28, 85-119

Weber, K., & Alcock, L. (2005). Using *Warrant*ed Implications to Undersatnd and Validate Proofs. *For the Learning of Mathematics*, *25*(1), 34–38.

GLOSARIUM

Aljabar Linier Elementer: salah satu mata kuliah wajib di program studi pendidikan matematika yang memuat masalah pembuktian yang bersifat abstrak.

Argumen: alat yang digunakan untuk menggali lebih dalam tentang sebuah keputusan yang terjadi secara rasional dalam menyusun pembuktian secara formal.

Akomodasi: proses pengintegrasian stimulus baru melalui pembentukan skema baru untuk menyesuaikan dengan stimulus yang diterima.

Analisis argumen model Toulmin: analisis yang diturunkan dari data (D) berupa klaim (C) dan didasarkan pada *warrant* (W) yang memiliki pendukung *backing* (B). *Warrant* bisa jadi tidak muncul jika dalam kondisi pengecualian atau *rebuttal* (R).

Asimilasi: proses pengintegrasian stimulus baru ke dalam skema yang sudah terbentuk.

Backing (B): bagian dari analisis Toulmin yang merupakan pendukung dari *warrant* yang diakui secara umum.

Data (D): bagian dari analisis Toulmin yang merupakan dasar atau fakta pada argumen.

Disequilibrium: kondisi tidak seimbang antara skema yang dimiliki dengan stimulus baru yang diterima.

Enaktif: tahap perkembangan kognitif menurut Bruner di mana anak belajar melalui pengetahuan motorik.

Equilibrium: kondisi seimbang antara asimilasi dan akomodasi karena ada interaksi dari lingkungan sekitar.

Ikonik: tahap perkembangan kognitif menurut Bruner di mana anak belajar melalui pengalaman.

Klaim (C): bagian dari analisis Toulmin berupa pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya

Memori episodik: bagian memori jangka panjang yang berkaitan dengan pengalaman pribadi.

Memori semantik: bagian memori jangka panjang yang berkaitan dengan fakta dan informasi general.

Memori prosedural: bagian memori jangka panjang yang berkaitan dengan pasangan stimulus-respon yang kompleks.

Memori jangka panjang: sistem memori yang berfungsi sebagai tempat menyimpan informasi untuk periode waktu yang panjang.

Memori jangka pendek: sistem penyimpanan yang dapat menyimpan informasi dalam jumlah yang terbatas dan hanya beberapa detik.

Operasional konkrit: tahap perkembangan kognitif anak usia 7 – 11 tahun menurut Piaget di mana anak belajar melalui proses berpikir logis yang bersifat konkrit.

Operasional formal: tahap perkembangan kognitif anak lebih dari 11 tahun menurut Piaget di mana anak belajar melalui proses berpikir logis yang bersifat abstrak.

Pra-Operasional: tahap perkembangan kognitif anak usia 2 – 7 tahun menurut Piaget di mana anak belajar melalui proses berpikir sederhana.

Rebuttal (R): bagian dari analisis Toulmin yang merupakan kondisi pengecualian untuk argumen.

Respon: reaksi atau tanggapan siswa terhadap stimulus yang diberikan guru.

Sensorimotor: tahap perkembangan kognitif anak usia 0 – 2 tahun menurut Piaget di mana anak belajar melalui pengalaman inderanya.

Simbolik: tahap perkembangan kognitif menurut Bruner di mana anak belajar melalui hipotesis.

Stimulus: segala sesuatu yang diberikan guru kepada pembelajar (siswa).

Teori APOS: teori belajar dalam bidang matematika yang terdiri dari tahap aksi, proses, obyek, dan skema.

Teori belajar behavioristik: teori belajar yang menekankan pada terbentuknya perilaku yang tampak sebagai hasil belajar.

Teori belajar kognitif: teori belajar yang menekankan pada proses belajar daripada hasil belajar.

Teori belajar sosiokultural: teori belajar yang menekankan pada interaksi antara orang yang belajar dengan orang lain yang berkompeten.

Teori pemrosesan informasi: teori belajar yang menekankan pada pemilahan informasi dalam otak.

Teori Tiga Dunia Matematika: teori belajar dalam bidang matematika yang terdiri dari tahap *embodied*, *symbolic*, dan formal.

Warrant (W): bagian dari analisis Toulmin yang merupakan penjamin yang digunakan untuk membuat kesimpulan berdasarkan data dan klaim.

ZPD (*Zone of Proximal Development*): zona perkembangan proksimal di mana anak yang dalam masa perkembangannya membutuhkan orang lain untuk memahami sesuatu.

INDEKS

Teori Belajar
MATEMATIKA

Belajar merupakan suatu aktivitas untuk mendapatkan pengetahuan. Seseorang dapat melakukan pembelajaran pada pendidikan formal maupun non formal. Dalam belajar terdapat teori-teori yang terkait dengan proses penyampaian informasi melalui memori otak. Buku ini memuat teori-teori belajar menurut para ahli dengan dilengkapi implementasinya dalam suatu pembelajaran.

Kehadiran buku ini dapat mempermudah proses belajar mengajar yang dilakukan oleh guru dan siswa, maupun mahasiswa dengan dosen. Buku ini juga dapat membantu mahasiswa sebagai calon guru matematika memahami implementasi.

IKAPI
IKATAN PENERBIT INDONESIA
Nomor: 028/PD-IKAPI JABAR/III/2022

Jalan Pasir Putih No. 16 Kelurahan Mekarjaya, Kecamatan Rancasari Kota Bandung – 085223186009

ISBN 978-623-99731-4-8 (PDF)
9 786239 973148