MATEMATIKA LANJUT

Dan Pembelajarannya

Sari Saraswati, M.Pd.
Iesyah Rodliyah, S.Si., M.Pd.
Novia Dwi Rahmawati, S.Si., M.Pd.

CV. A.A RIZKY

MATEMATIKA LANJUT
Dan Pembelajarannya

Matematika dari penjelasan diatas adalah suatu pola yang tumbuh dan kembang dalam kehidupan yang tercipta dari proses berfikir yang akan menciptakan pola keteraturan, dan struktur yang terorganisasi, mulai dari unsur yang tidak didefinisikan, ke aksioma atau postulat, dan akhirnya ke dalil. itu matematika memberikan bahasa, proses, dan teori yang memberikan ilmu suatu bentuk dan kekuasaan. Metode matematis memberikan inspirasi kepada pemikir dibidang sosial dan ekonomi.

Terjadi perdebatan apakah objek-objek matematika seperti bilangan dan titik sudah ada di semesta, ataukah ditemukan dan diciptakan manusia. Pengkajian logis mengenai bentuk, susunan, besaran, dan konsep-konsep yang berkaitan, matematika seringkali dikelompokkan ke dalam tiga bidang: aljabar, analisis, dan geometri. Walaupun demikian, tidak dapat dibuat pembagian yang jelas karena cabang-cabang ini telah bercampur baur.

Dalam materi Matematika Lanjutan ini akan dibicarakan tentang persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial dengan menggunakan deret fourier, transformasi laplace, fungsi gamma dan fungsi betha, persamaan bessel, dan polinom legendre. Diharapkan pada matakuliah ini mahasiswa dapat memperdalam penguasaan mengenain persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial.

ISBN 978-623-405-009-7

9 786234 050097

Penerbit : **CV. AA. RIZKY**
Alamat : **Jl. Raya Ciruas Petir, Puri Citra Blok B2 No. 34 Pipitan Kec. Walantaka - Serang Banten**
E-mail : *aa.rizkypress@gmail.com*
Website : *www.aarizky.com*

MATEMATIKA LANJUT
Dan Pembelajarannya

MATEMATIKA LANJUT
Dan Pembelajarannya

Sari Saraswati, M.Pd.
Iesyah Rodliyah, S.Si., M.Pd.
Novia Dwi Rahmawati, S.Si., M.Pd.

PENERBIT:
CV. AA. RIZKY
2021

MATEMATIKA LANJUT
Dan Pembelajarannya

Penulis:
Sari Saraswati, M.Pd.
Iesyah Rodliyah, S.Si., M.Pd.
Novia Dwi Rahmawati, S.Si., M.Pd.

Desain Cover & Tata Letak:
Tim Kreasi CV. AA. Rizky

Cetakan Pertama, November 2021

Penerbit:
CV. AA. RIZKY
Jl. Raya Ciruas Petir, Puri Citra Blok B2 No. 34
Kecamatan Walantaka, Kota Serang - Banten, 42183
Hp. 0819-06050622, Website : *www.aarizky.com*
E-mail: aa.rizkypress@gmail.com

Anggota IKAPI
No. 035/BANTEN/2019

ISBN : 978-623-405-009-7
xii + 138 hlm, 23 cm x 15,5 cm

PRAKATA

Syukur Alhamdulillah, penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan berkat, rahmat, dan hidayah-Nya dan tak lupa sholawat serta salam tetap terlimpahkan kepada junjungan kita Rasulullah SAW, atas terselesainya buku dengan judul "Matematika Lanjut & Pembelajarannya". Dengan terselesainya buku ini diharapkan dapat membantu para calon/tenaga pendidik khususnya para pembaca untuk menggunakan bahan ajar pada mata kuliah Matematika Lanjut.

Penulis menyadari bahwa terselesaikannya buku ini tidak terlepas dari bantuan semua pihak, untuk itu penulis menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya khususnya kepada RISTEKBRIN, Rektor Universitas Hasyim, LPPM Universitas Hasyim Asy'ari, Dekan Fakultas Ilmu Pendidikan, Kaprodi Pendidikan Matematika, dan Bapak Ibu dosen FIP yang memberikan kesempatan dan motivasi kepada penulis.

Akhir kata, Penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari kesempurnaan, untuk itu saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan demi penyempurnaan buku ini. Semoga buku ini bisa bermanfaat bagi kita semua khususnya para pembaca baik di dunia dan akhirat. Aamiiin Yaa Robbal 'Aalamiiin…

Jombang,   November 2021

Penulis,

DAFTAR ISI

PRAKATA v
DAFTAR ISI vi
DAFTAR TABEL x
DAFTAR GAMBAR xi
BAB 1 EKSPONEN DAN LOGARITMA 1
A. Tujuan Pembelajaran 1
B. Eksponensial dan Sifat-sifatnya 2
C. Logaritma dan Sifat-sifatnya 7
D. Contoh-contoh Soal 11
E. Rangkuman 23
F. Evaluasi 28
BAB 2 PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN KUADRAT 29
A. Tujuan Pembelajaran 28
B. Pendahuluan 28
C. Definisi Persamaan Kuadrat 30
D. Penyelesaian Persamaan Kuadrat 32
E. Akar-Akar Persamaan Kuadrat 39
F. Sifat-Sifat Akar Persamaan Kuadrat 39
G. Menyusun Persamaan Kuadrat Baru 40
H. Fungsi Kuadrat 40
I. Pertidaksamaan Kuadrat dan Penyelesaiannya 43
J. Contoh-Contoh Soal 43
K. Rangkuman 52

L. Evaluasi 53
BAB 3 KOMBINATORIK 55
A. Tujuan Pembelajaran 55
B. Definisi Peluang 55
C. Peluang Kejadian 61
D. Kaidah Perkalian dan Pernjumlahan 65
E. Pengisian Tempat yang Berbeda 70
F. Notasi Faktorial 71
G. Permutasi 71
H. Kombinasi 78
I. Perbedaan Permutasi dan Kombinasi 85
J. Rangkuman 87
K. Evaluasi 88
BAB 4 BARISAN DAN DERET 93
A. Tujuan Pembelajaran 93
B. Barisan 93
C. Deret 95
D. Barisan dan deret Aritmatika 95
E. Barisan dan Deret Geometri 97
F. Teorema Binomial 100
G. Contoh-contoh Soal 103
H. Rangkuman 108
I. Evaluasi 109
BAB 5 TRIGONOMETRI 113
A. Tujuan Pembelajaran 113
B. Definisi Trigonometri 113
C. Sudut Berelasi 115
D. Persamaan Trigonometri 120

E. Identitas Trigonometri 121
F. Rumus-Rumus Trigonometri 124
G. Contoh-Contoh Soal 126
H. Rangkuman 132
I. Evaluasi / Soal Latihan 134
DAFTAR PUSTAKA 135
TENTANG PENULIS 136

DAFTAR TABEL

Tabel 1.1 Hasil pemetaan dari $y = {}^{2}\log x$ dan $y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ 8

Tabel 3.1 Ruang sampel Dua Dadu 60

Tabel 3.2 Ruang sampel Dua Dadu 62

Tabel 3.3 Banyak Susunan Permutasi r Objek dari n Objek 72

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Diagram panah fungsi $f : x \to ka^x$ 3

Gambar 1.2 Grafik fungsi $f(x) = a^x$ 4

Gambar 1.3 Fungsi $y = {}^2\log x$ dan $y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$............ 8

Gambar 2.1 Persegi Panjang... 30

Gambar 3.1 Susunan Objek-Objek Melingkar 75

Gambar 5.1 Segitiga siku-siku ABC 113

Gambar 5.2. Sudut Berelasi (90° - α) 115

Gambar 5.3 Sudut Berelasi (180°- α) 116

Gambar 5.4 Sudut Berelasi $(180° + \alpha)$ 117

Gambar 5.5 Sudut Berelasi $(-\alpha)$.. 118

Gambar 5.6 Sudut Berelasi Pada Kuadaran I-IV 119

Gambar 5.7 Nilai Perbandingan Trigobometri Pada Kuadran I-IV 120

Gambar 5.8 Segitiga Siku-Siku ABC.................................. 122

BAB 1
EKSPONEN DAN LOGARITMA

A. Tujuan Pembelajaran

Bab ini merupakan materi yang diajarkan pada sekolah menengah atas dalam kurikulum 2013 sebagai salah satu materi yang ada dalam mata pelajaran Matematika Peminatan kelas X. Materi ini penting dipelajari bagi mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika sebagai dasar dan acaun dalam mempelajari konsep eksponen dan logaritma. Adapun tujuan pembelajaran pada bab ini antara lain:

- Mahasiswa mampu menjelaskan perbedaan eksponensial dan logaritma.
- Mahasiswa mampu menjelaskan sifat-sifat dari persamaan dan pertidaksamaan eksponensial.
- Mahasiswa mampu menentukan nilai suatu variabel pada fungsi persamaan dan pertidaksamaan eksponensial.
- Mahasiswa mampu mampu menentukan nilai suatu variabel pada fungsi persamaan dan pertidaksamaan logaritma.
- Mahasiswa mampu menjelaskan sifat-sifat dari persamaan dan pertidaksamaan logaritma.

B. Eksponensial dan Sifat-sifatnya

1. Pengertian dan Sifat Eksponensial

Ekponensial merupakan operasi bilangan dalam bentuk pangkat yang dinyatakan dalam bentuk $a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a$. Selain itu terdapat sifat-sifat dalam eksponensial yakni sebagai berikut.

a. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}; a \neq 0$

Contoh:

$\frac{1}{5^4} = 5^{-4}$

b. $a^m . a^n = a^{m+n}$

Contoh:

$2^3 . 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$

c. $a^m : a^n = a^{m-n}; a \neq 0$

Contoh:

$3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2$

d. $a^0 = 1; a \neq 0$

e. $(a^m)^n = a^{m.n}$

Contoh:

$(5^4)^3 = 5^{4\times 3} = 5^{12}$

f. $(a.b)^m = a^m . b^m$

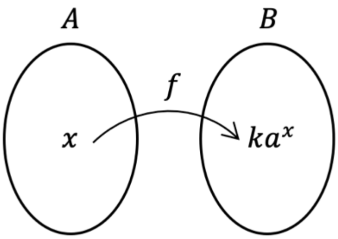
Contoh:

$(2.3)^5 = 2^5 . 3^5$

2. Fungsi Eksponensial dan Grafiknya

Fungsi merupakan relasi khusus yang memetakan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B yang dinyatakan sebagai

$f: A \to B$. Apakah setiap $x \in A$ tepat mempunyai pasangan di $y \in B$?. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 1.1 Diagram panah fungsi $f: x \to ka^x$

Pada gambar diatas, tampak bahwa setiap bilangan real x dipetakan dnegan tepat ke bilangan real ka^x, dengan k sebagai konstanta. Dengan demikian, fungsi dengan notasi y sehingga $y = f(x) = ka^x$ dengan x variabel bebas, sedangkan a merupakan bilangan pokok (basis), dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$. Fungsi seperti ini disebut dengan fungsi eksponen. secara umum, pengertian fungsi eksponen dapat didefinisikan sebagai berikut:

> Fungsi eksponen adalah sebuah fungsi yang memetakan setiap x anggota himpunan bilangan real dengan tepat satu anggota bilangan real ka^x, dengan k suatu konstanta dan a bilangan pokok (basis), dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$.

Fungsi eksponenensial disebut juga fungsi pemangkatan berbentuk a^x dimana a adalah bilangan konstanta positif dan x adalah variabel fungsi. Fungsi ekponensial dapat didefinisikan sebagai berikut:

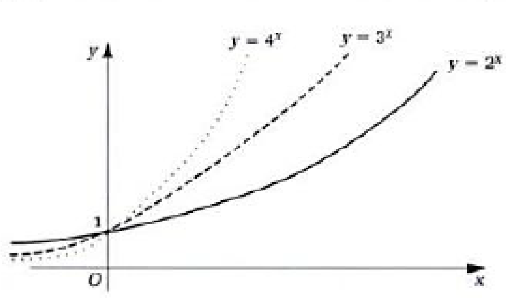
$f(x) = a^x; a > 0; a \neq 1$

Contoh fungsi ekponensial sebagai berikut.

$f(x) = 3^{x+2} \rightarrow a = 3; 3 > 0; a \neq 1.$

$f(x) = 5^2 \rightarrow a = 5; 3 > 0; a \neq 1$

Grafik fungsi pada ekponensial memiliki bentuk dasar yang sama. Titik tersebut dapat diambil beberpa nilai x dan kemudian diamsukkan dalam fungsi sehingga menghasilkan y, maka diperoleh pasangan (x, y). Berikut contoh grafiknya:



Gambar 1.2 Grafik fungsi $f(x) = a^x$

Dari grafik fungsi logaritma diatas, dapat disimpulkan sifat dari grafik tersebut. Grafik fungsi eksponensial memiliki sifat:

a. Kontinu
b. Merupakan fungsi satu-satu
c. Domain: $(\infty, -\infty)$ atau $x \in R$
d. Range: $(0, \infty)$ atau $y > 0, y \in R$
e. Memotong sumbu y di titik $(0,1)$
f. Grafik diatas mendefinisikan dari semua nilai x
g. Grafik berada diatas sumbu x

h. Sumbu x (garis $y = 0$) adalah asimtot dan setiap grafik cenderung tak terhingga x semakin besar

3. Persamaan Fungsi Eksponensial

Persamaan eksponen adalah suatu persamaan yang pangkatnya (eksponen), bilangan pokoknya, atau bilangan pokok dan eksponennya memuat suatu variabel.

Persamaan fungsi ekponensial memiliki berbagai bentuk, yakni sebagai berikut:

a. Jika $a^{f(x)} = 1, a > 0; a \neq 1$ maka $f(x) = 0$.

b. Jika $a^{f(x)} = a^n, a > 0; a \neq 1$ maka $f(x) = n$

c. Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0; a \neq 1$ $maka$ $f(x) = g(x)$

d. Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}, a > 0; a \neq 1;\ b > 0; b \neq 1$ maka $f(x) =$ 0

e. Jika $a^{f(x)} = b^{g(x)}, a > 0; a \neq 1;\ b > 0; b \neq$.
1 maka $\log a^{f(x)} = \log b^{g(x)}$

f. Jika $A\left(a^{f(x)}\right)^2 + B\left(a^{f(x)}\right) + C = 0$ maka penyelesaiannya dapat dimisalkan dengan $y = a^{f(x)}$ sehingga diperoleh bentuk persamaan kuadrat dengan variabel y. Persamaan kuadrat dapat diselesaikan dengan memfaktorkan, melengkapkan kudrat sempurna, dan rumus abc.

g. Jika $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$, maka kemungkinannya adalah:

1) $f(x) = g(x)$

2) $h(x) = 1$

3) $h(x) = 0$ dengan syarat $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$

4) $h(x) = -1$ dengan syarat $f(x)$ dan $g(x)$ sama-sama genap atau sama-sama ganjil

h. Jika $f(x)^{g(x)} = 1$, maka kemungkinannya adalah

1) $f(x) = 1$

2) $g(x) = 0$ dengan syarat $f(x) \neq 0$

3) $f(x) = -1$ dengan syarat $g(x)$ genap

i. Jika $g(x)^{f(x)} = h(x)^{f(x)}$, maka kemungkinannya adalah:

1) $f(x) = 0$ untuk $g(x) \neq 0$ dan $h(x) \neq 0$

2) $g(x) = h(x)$

4. Pertidaksamaan Fungsi Eksponensial

Pertdaksamaan ekponensial merupakan bentuk lain dari persamaan ekponensial, pada pertidak-samaan meggunakan tanda ketidaksamaan meliputi: >, <, ≥, atau ≤. Dalam menyelesaiakan pertidaksamaan eksponen dapat menggunakan sifat eksponen, ketentuan pada persamaan eksponen maupun tujuan pada grafik fungsi eksponensial.

Contohnya jika $x > y$, maka $2^x > 2^y$, ini merupakan sifat-sifat pertidaksamaan, akan tetapi jika ditinjau dari grafik $f(t) = 2^t$, akan menjadi hal yang terbalik yaitu: $2^x > 2^y$ maka $x < y$. Fenomena tersebut merupakan pedoman dasar untuk menyelesaikan peridaksamaan eksponen dengan bilangan pokok $a = 2 > 1$. Sifat-sifat dasar pertidaksamaan eksponensial:

(i) Jika $a > 1$, maka $a^x < a^y \leftrightarrow x < y$

(ii) Jika $0 < a < 1$, maka $a^x < a^y \leftrightarrow x > y$

C. Logaritma dan Sifat-sifatnya

1. Pengertian Logaritma

Logaritma adalah *invers* atau kebalikan dari eksponensial. Pada eksponensial dinyatakan dalam bentuk $a^n = b$, sedangkan pada logaritma dinyatakan dalam bentuk ${}^{a}\log b = n$, sebagai contoh:

a. $5^2 = 25 \rightarrow {}^{2}log 25 = 5$

b. $4^4 = 256 \rightarrow {}^{4}log 256 = 4$

c. $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \rightarrow {}^{\frac{1}{2}}log\,\frac{1}{4} = 4$

2. Fungsi Logaritma dan Grafiknya

Fungsi logaritma dinyatakan dalam bentuk $y = {}^{a}\log x$ dengan $a > 0; a \neq 1$ dan $x > 0$.

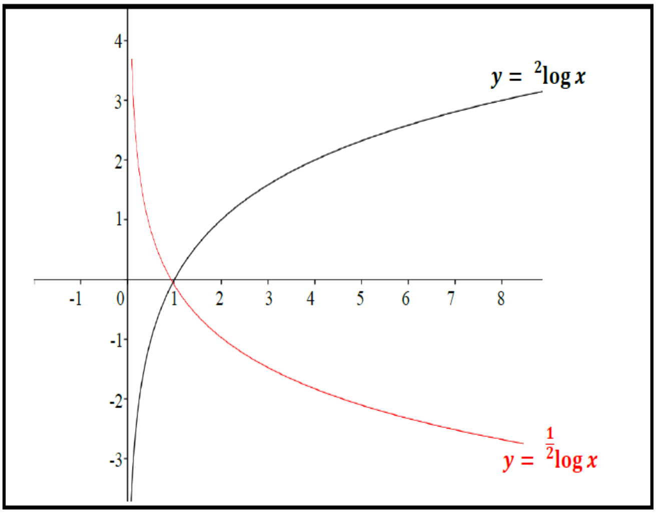
Fungsi logaritma memiliki grafik yang dapat dilukis pada bidang kartesius. Pada fungsi logaritma *x* hanya boleh $x > 0$. Sebagai contoh $y = {}^{2}\log x$ dan $y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ dengan interval *x* yang diambil = $\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8 \}$. Sehingga didapat tabel pasangan titik *x* dan *y* sebagai berikut:

Tabel 1.1

Hasil pemetaan dari $y = {}^{2}\log x$ dan $y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = {}^{2}\log x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$	3	2	1	0	-1	-2	-3

Dari tabel 1.1, pasangan titik tersebut dapat dibuat sebuah grafik sebagai berikut:



Gambar 1.3 Fungsi $y = {}^{2}\log x$ dan $y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$

Dari grafik fungsi logaritma diatas, dapat disimpulkan sifat dari grafik tersebut. Grafik fungsi logaritma memiliki sifat:

a. Grafiknya bersifat kontinu.

b. Merupakan fungsi satu-satu.

c. Domain $x: > 0, x \in R$

d. Range $y: (\infty, -\infty)$ atau $y \in R$

e. Grafik $y = {}^{a}\log x$ naik jika $a > 1$

f. Grafik $y = {}^{a}\log x$ turun jika $0 < a < 1$

g. Memotong sumbu $(1,0)$

h. Memiliki asimtot tegak sumbu y

3. Sifat-sifat Logaritma

Jika nilai $a > 0$ dan $a \neq 1, m > 0$ dan $m \neq 1, b > 0$ dan $c > 0$ maka berlaku hubungan berikut ini:

a. ${}^{a}\log 1 = 0$

b. ${}^{a}\log a = 1$

c. ${}^{a}\log b + {}^{a}\log c = {}^{a}\log(b.c)$

d. ${}^{a}\log b - {}^{a}\log c = {}^{a}\log(\frac{b}{c})$,

e. ${}^{a}\log b = \frac{{}^{m}\log b}{{}^{m}\log a}$

f. ${}^{a}\log b^{m} = m.\ {}^{a}\log b$

g. ${}^{a^{m}}\log b = \frac{1}{m}.\ {}^{a}\log b$

h. $a^{{}^{a}\log b} = b$

i. ${}^{a}\log b\ .\ {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$

j. ${}^{a}\log b = \frac{1}{{}^{b}\log a}$

k. ${}^{a}log(\frac{b}{c}) = -\ {}^{a}log(\frac{c}{b})$

4. Persamaan Fungsi Logaritma

Persamaan logaritma adalah persaman yang didalamnya terdapat logaritma di mana numerus ataupun bilangan pokok mengandung variabel.

Beberapa bentuk dan contoh soal dapat dilihat pada pembahasan berikut:

a. ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$

$a > 0; a \neq 1; f(x) > 0; p > 0$ maka $f(x) = p$

b. ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$,

$a > 0; a \neq 1; f(x) > 0; g(x) > 0$ maka $f(x) = g(x)$

c. ${}^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x), a > 0; a \neq 1; f(x) > 0; b >$ 0,

maka *f*(x) = 1

d. ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x), h(x) > 0; h(x) \neq 1; f(x) >$ 0;

g(x) > 0 maka *f(x) = g(x)*

e. $A.({}^{a}\log^2 f(x)) + B.({}^{a}\log f(x)) + C = 0 ; a > 0; a \neq$ 1;

f(x) > 0; dan *A,B,C* ϵ *R*

Maka untuk mencari nilai *x* yang memenuhi adalah dengan memisalkan ${}^{a}\log f(x) = p$, sehingga persamaannya menjadi $A.p^2 + B.p + C = 0$ kemudian ditentukan akar-akar dari persamaan kuadrat tersebut.

5. Pertidaksamaan Fungsi Logaritma

Pertidaksamaan fungsi logaritma merupakan bentuk lain dari persamaan fungsi logaritma, yaitu pertidaksamaan dengan variabelnya berada dalam suatu indeks yang memiliki tanda ketidaksamaan, yang meliputi $<, \leq, >,$ atau $\geq$. Hal ini dalam menyelesaiakan suatu pertidaksamaan logaritma diharuskan menggunakan sifat-sifat logaritma, berikut adalah sifat pertidaksamaan fungsi pada logaritma:

a. Untuk $a > 1$

$$^{a}\log f(x) > {}^{a}\log g(x), \quad \text{maka } f(x) > g(x) > 0$$

$$^{a}\log f(x) < {}^{a}\log g(x), \quad \text{maka } 0 < f(x) < g(x)$$

b. Untuk $0 < a < 1$

$$^{a}\log f(x) > {}^{a}\log g(x), \quad \text{maka } 0 < f(x) < g(x)$$

$$^{a}\log f(x) < {}^{a}\log g(x), \quad \text{maka } f(x) > g(x) > 0$$

D. Contoh-contoh Soal

Agar dapat memahami konsep eksponen dan logaritma dengan baik, maka berikut ini disajikan beberapa contoh soal.

1. Diberikan $f(x) = 8^x$ carilah nilai dari.
   a. $f(4)$
   b. $f(2)$
   c. $f(-1)$

   Penyelesaian:

   a. $f(4) = 8^4 = 4.096$
   b. $f(2) = 8^2 = 64$
   c. $f(-1) = 8^{-1} = \frac{1}{8}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $2^{2x+3} = 1$.

   Penyelesaian:

   $2^{2x+3} = 1$ akan diperoleh penyelesainnya jika $2x + 3 = 0$, hal ini disebabkan karena $2^{2x+3} = 1$ dapat diubah menjadi $2^{2x+3} = 2^0$, sehingga didapat bahwa:

$2x + 3 = 0$

$2x = -3$

$x = -\frac{3}{2}$

Jadi penyelesaiannya adalah $x = -\frac{3}{2}$.

3. Tentukan nilai x dari persamaan fungsi eksponensial berikut ini! $4^{x-2} = 16$

   Penyelesaian:

   $4^{x-2} = 16$

   $(2^2)^{x-2} = 2^4$

   $2^{2x-4} = 2^4$

   $2x - 4 = 4$

   $2x = 4 + 4$

   $2x = 8$

   $x = 4$

4. Tentukan nilai x dari persamaan ekponensial $4^{2x-1} - 2^{-x+8} = 0$

   Penyelesaian:

   $4^{2x-1} - 2^{-x+8} = 0$

   $4^{2x-1} = 2^{-x+8}$

   $(2^2)^{2x-1} = 2^{-x+8}$

   $2^{4x-2} = 2^{-x+8}$

   $4x - 2 = -x + 8$

   $4x = -x + 8 + 2$

   $4x = -x + 10$

   $4x + x = 10$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

5. Tentukan penyelesaian dari persamaan $4^{x+1} = 3^{2x}$.

   Penyelesaian:

   $4^{x+1} = 3^{2x}$

   $\Leftrightarrow (2^2)^{x+1} = 3^{2x}$

   $\Leftrightarrow 2^{2x+2} = 3^{2x}$

   $\Leftrightarrow 2^{2x}.2^2 = 3^{2x}$

   $\Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{3^{2x}} = \frac{1}{2^2}$

   $\Leftrightarrow \left(\frac{2^2}{3^2}\right)^x = \frac{1}{2^2}$

   $\Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{1}{4}$

   $\Leftrightarrow x \log\frac{4}{9} = \log\frac{1}{4}$

   $\Leftrightarrow x = {}^{\frac{4}{9}}\log\frac{1}{4}$

   Jadi, penyelesaiannya adalah $x = {}^{\frac{4}{9}}\log\frac{1}{4}$.

6. Tentukan himpunan penyelesain dari persamaan $2^{2x+1} - 2^x - 6 = 0$.

   Penyelesaian:

   Menurut sifat eksponen maka persamaan $2^{2x+1} - 2^x - 6 = 0$ dapat diubah menjadi bentuk berikut:

   $2^{2x+1} - 2^x - 6 = 0$

   $\Leftrightarrow 2^{2x}.2^1 - 2^x - 6 = 0$

   $\Leftrightarrow 2(2^x)^2 - 2^x - 6 = 0$

Misalkan $2^x = y$ maka diperoleh:

$2y^2 - y - 6 = 0$

$(2y + 3)(y - 2) = 0$

$y = -\frac{3}{2}$ atau $y = 2$

Dengan demikian diperoleh nilai sebagai berikut:

- Untuk $y = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^x = -\frac{3}{2}$, nilai x tidak ada yang memenuhi sebab bilangan positif dipangkatkan berapa saja hasilnya selalu positif.
- Untuk $y = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2$, nilai $x = 1$.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{1\}$.

7. Tentukan nilai x dari persamaan ekponensial $5^{4x-2} = 4^{2x-1}$

   Penyelesaian:

   $5^{4x-2} = 4^{2x-1}$

   $5^{4x-2} = (2^2)^{2x-1}$

   $5^{4x-2} = 2^{4x-2}$

   $4x - 2 = 0$

   $4x = 2$

   $x = \frac{2}{4}$

   $x = \frac{1}{2}$

8. Tentukan nilai x dari persamaan ekponensial $(x-2)^{x+4} = (x-2)^{2x-1}$

   Penyelesaian:

   $f(x) = x + 4, g(x) = 2x - 1, dan\ h(x) = x - 2$

   1) $f(x) = g(x)$

$x + 4 = 2x - 1$

$x = 2x - 1 - 4$

$x = 2x - 5$

$x - 2x = -5$

$-x = -5$

$x = 5$

2) $h(x) = 1$

$x - 2 = 1$

$x = 1 + 2$

$x = 3$

3) $h(x) = 0$ dengan syarat $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2 \rightarrow$dimasukkan dalam $f(x)$ dan $g(x)$

$f(x) = x + 4 = 2 + 4 = 6 \rightarrow f(x) > 0$

$g(x) = 2x - 1 = 2(2) - 1 = 3 \rightarrow g(x) > 0$

Jadi $x = 2$ memenuhi

4) $h(x) = -1$ dengan syarat $f(x)$ dan $g(x)$ sama-sama genap atau sama-sama ganjil

$x - 2 = -1$

$x = -1 + 2$

$x = 1 \rightarrow$ dimasukkan dalam $f(x)$ dan $g(x)$

$f(x) = x + 4 = 1 + 4 = 5 \rightarrow f(x)$ ganjil

$g(x) = 2x - 1 = 2(1) - 1 = 1 \rightarrow g(x)$ ganjil

Dari keempat kemungkinan yang telah dianalisa maka diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah $\{1, 2, 3, 5\}$.

9. Tentukan nilai x dari persamaan ekponensial $(2x+5)^{2x+8} = 1$

Penyelesaian:

$f(x) = 2x + 5 \; dan \; g(x) = 2x + 8$

1) $f(x) = 1$

$2x + 5 = 1$

$2x = 1 - 5$

$2x = -4$

$x = -2$

2) $g(x) = 0$ dengan syarat $f(x) \neq 0$

$2x + 8 = 0$

$2x = -8$

$x = -4 \rightarrow$ dimasukkan dalam $f(x)$

$f(x) = 2x + 5 = 2(-4) + 5 = -3 \rightarrow f(x) \neq 0$

Jadi $x = -4$ memenuhi

3) $f(x) = -1$ dengan syarat $g(x)$ genap

$2x + 5 = -1$

$2x = -1 - 5$

$2x = -6$

$x = -3 \rightarrow$ dimasukkan dalam $g(x)$

$g(x) = 2x + 8 = 2(-3) + 8 = 2 \rightarrow g(x)$ genap

Jadi $x = -3$ memenuhi

Dari tiga kemungkinan yang telah dianalisa maka diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah $\{-2, -3, -4\}$.

10. Tentukan nilai x dari persamaan ekponensial $3^{2x+1} - 4.3^{x+1} + \sqrt{81} = 0$

Penyelesaian:

$3^{2x+1} - 4.3^{x+1} + \sqrt{81} = 0$

$3^{2x}.3^1 - 4.3^x.3^1 + 9 = 0$

$3.3^{2x} - 12.3^x + 9 = 0$

$3.(3^x)^2 - 12.3^x + 9 = 0$

Misalkan $3^x = p$ maka persamaannya menjadi

$3p^2 - 12p + 9 = 0$

$(3p^2 - 12p + 9 = 0):3$

$p^2 - 4p + 3 = 0$

$(p-1)(p-3) = 0$

$p_1 = 1; p_2 = 3$

Mencari nilai x yang memenuhi dari $2^x = p$

1) $3^x = p_1$

$3^x = 1$

$3^x = 3^0$

$x_1 = 0$

2) $3^x = p_2$

$3^x = 3$

$3^x = 3^1$

$x_2 = 1$

Jadi nilai x yang memenuhi untuk persamaan $3^{2x+1} - 4.3^{x+1} + \sqrt{81} = 0$ adalah $x = \{0,1\}$.

11. Tentukan nilai x dari pertidaksamaan eksponensial

a. $\sqrt{4^{2x-4}} \leq 8^{x+1}$

b. $\frac{1}{2^{x-4}} > \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Penyelesaian:

a. $\sqrt{4^{2x-4}} \leq 8^{x+1}$

$\sqrt{(2^2)^{2x-4}} \leq (2^3)^{x+1}$

$\sqrt{2^{4x-8}} \leq 2^{3x+3}$

$(2^{4x-8})^{\frac{1}{2}} \leq 2^{3x+3}$

$2^{2x-4} \leq 2^{3x+3}$

Karena $a = 2$ dimana $2 > 1$, maka tanda ketidaksamaan tetap ≤

$$2x - 4 \leq 3x + 3$$
$$2x \leq 3x + 3 + 4$$
$$2x - 3x \leq 7$$
$$-x \leq 7$$
$$x \geq -7$$

b. $\frac{1}{2^{x-4}} > \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\frac{1}{2^{x-4}} > \frac{1}{2^{1\frac{1}{2}}}$

$(\frac{1}{2})^{x-4} > (\frac{1}{2})^{1\frac{1}{2}}$

Karena $a = \frac{1}{2}$, dimana $0 < a < 1$, maka tanda ketidaksamaan berubah sebagai berikut.

$$x - 4 < 1\frac{1}{2}$$

$$x < 5\frac{1}{2}$$

12. ${}^{2}\log(2 + x) = {}^{2}\log 9$, tentukan nilai *x*!

    Penyelesaian:

    Mencari daerah x yang terdefinisi

    ${}^{2}\log(2 + x)$, maka $(2 + x) > 0$

    $$x > -2$$

    Mencari nilai x yang memenuhi

    $${}^{2}\log(2 + x) = {}^{2}\log 9$$
    $$(2 + x) = 9$$
    $$x = 9 - 2$$
    $$x = 7$$

    Jadi, $x = 7$ terdefinisi dan memenuhi persamaan fungsi logaritma ${}^{2}\log(2 + x) = {}^{2}\log 9$.

13. ${}^{4}\log(2x + 4) = {}^{4}\log(2 - x)$, tentukan nilai *x* yang memenuhi persamaan fungsi logaritma tersebut!

    Penyelesaian:

    Menentukan daerah *x* yang terdefinisi

    ${}^{4}\log(2x + 4)$ maka $2x + 4 > 0$

    $2x > -4$

    $x > -2$

    ${}^{4}\log(2 - x)$ maka $2 - x > 0$

    $$x < 2$$

    Jadi daerah x yang terdefinisi adalah $-2 < x < 2$.

    Mencari nilai x yang memenuhi persamaan

$$^{4}\log(2x+4) = {}^{4}\log(2-x)$$

$$2x+4 = 2-x$$

$$3x = -2$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Jadi x yang terdefinisi dan memenuhi persamaan fungsi logaritma tesebut adalah $x = -\frac{3}{2}$.

14. $^{5}\log(4x-8) = {}^{2}\log(4x-8)$, tentukan nilai x!

Penyelesaian:

Menentukan daerah x yang terdefinisi

$$4x - 8 > 0$$

$$4x > 8$$

$$x > 2$$

Mencari nilai x yang memenuhi persamaan

$$^{5}\log(4x-8) = {}^{2}\log(4x-8)$$

$$4x - 8 = 1$$

$$4x = 9$$

$$x = \frac{9}{4}$$

Jadi x yang terdefinisi dan memenuhi $^{5}\log(4x-8) = {}^{2}\log(4x-8)$ adalah $x = \frac{9}{4}$.

15. $^{x-4}\log(4x-8) = {}^{x-4}\log(2x+8)$, Tentukan nilai x!

Penyelesaian:

Menentukan daerah x yang terdefinisi

Misalkan: $h(x) = x - 4$; $f(x) = 4x - 8$; $g(x) = 2x + 8$, maka persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan memenuhi syarat sebagai berikut:

(i) $h(x) > 0$

$x - 4 > 0$

$x > 4$

(ii) $h(x) \neq 1$

$x - 4 \neq 1$

$x \neq 5$

(iii) $f(x) > 0$

$4x - 8 > 0$

$x > 2$

(iv) $g(x) > 0$

$2x + 8 > 0$

$x > -4$

Jadi x yang terdefinisi adalah $x > 4$; $x \neq 5$.

Maka untuk mencari nilai x yang memenuhi persamaan.

${}^{x-4}\log(4x - 8) = {}^{x-4}\log(2x + 8)$ diperoleh:

$4x - 8 = 2x + 8$

$2x = 16$

$x = 8$

Jadi nilai x yang terdefinisi dan memenuhi persamaan tersebut adalah $x = 8$.

16. ${}^{2}\log {}^{2}x - 6.\ {}^{2}\log x + 8 = 0$, tentukan nilai *x*!

Penyelesaian:

Mencari daerah *x* yang terdefinisi

Misalkan ${}^{2}\log x = p$, diperoleh

$p^2 - 6p + 8 = 0$

$(p-4)(p-2) = 0$

$p = 4$ atau $p = 2$

$p = 4 \rightarrow {}^{2}\log x = 4 \rightarrow x = 2^4 = 16$

$p = 2 \rightarrow {}^{2}\log x = 2 \rightarrow x = 2^2 = 4$

Jadi nialai-nilai x yang memenuhi adalah 16 dan 4.

17. Tentukan nilai *x* yang memenuhi pertidaksamaan:

a. ${}^{2}\log(x^2 - 3x) \leq {}^{2}\log 18$

b. ${}^{\frac{1}{2}}\log(x^2 - 2x) > {}^{\frac{1}{2}}\log 8$

Penyelesaian:

a. Dalam menjawab soal ini ditinjau dalam dua keadaan, yaitu:

(i) *Syarat numerus logaritma:*

$x^2 - 3x > 0 \rightarrow x(x-3) > 0$

$x < 0$ atau $x > 3)$ ... (1)

(ii) *Syarat pertidaksamaan:*

${}^{2}\log(x^2 - 3x) \leq {}^{2}\log 18$

$x^2 - 3x \leq 18$

$x^2 - 3x - 18 \leq 0$

$(x-6)(x+3) \leq 0$

$-3 \leq x \leq 6$ ... (2)

Irisan pertidaksamaan (1) dan (2) diperoleh:

$-3 \leq x < 0$ atau $3 < x \leq 6$

b. syarat yang harus dipenuhi adalah:

(i) *Syarat numerus logaritma*

$x^2 - 2x > 0 \rightarrow x(x-2) > 0$

$x < 0$ atau $x > 2$ ... (1)

(ii) *Syarat pertidaksamaan*

${}^{\frac{1}{2}}\log(x^2 - 2x) > {}^{\frac{1}{2}}\log 8$

$x^2 - 2x < 8$

$x^2 - 2x - 8 < 0$

$(x-4)(x+2) < 0$

$-2 < x < 4$ ... (2)

Irisan pertidaksamaan (1) dan (2) diperoleh:

$-2 \leq x < 0$ atau $2 < x \leq 4$

E. Rangkuman

Eksponensial

1. Ekponensial merupakan operasi bilangan dalam bentuk pangkat yang dinyatakan dalam bentuk $a^n = a \times a \times a \times ... \times a$.
2. Sifat-sifat eksponensial:

   a) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}; a \neq 0$

   b) $a^m . a^n = a^{m+n}$

   c) $a^m : a^n = a^{m-n}; a \neq 0$

   d) $a^0 = 1; a \neq 0$

e) $(a^m)^n = a^{m.n}$

f) $(a.b)^m = a^m.b^m$

3. Grafik fungsi eksponensial memiliki sifat:
   a) Kontinu
   b) Merupakan fungsi satu-satu
   c) Domain: $(\infty, -\infty)$ atau $x \in R$
   d) Range: $(0, \infty)$ atau $y > 0, y \in R$
   e) Memotong sumbu y di titik $(0,1)$
   f) Grafik diatas mendefinisikan dari semua nilai x
   g) Grafik berada diatas sumbu x
   h) Sumbu x (garis $y = 0$) adalah asimtot dan setiap grafik cenderung tak terhingga x semakin besar.
4. Persamaan fungsi ekponensial memiliki berbagai bentuk, yakni sebagai berikut:
   a) Jika $a^{f(x)} = a^n$ maka $f(x) = n, a > 0; a \neq 1$
   b) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ maka $f(x) = g(x), a > 0; a \neq 1$
   c) $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ maka $f(x) = 0, a > 0; a \neq 1; b >$ 0: b≠1
   d) Jika $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$, maka kemungkinannya adalah:
      (i) $f(x) = g(x)$
      (ii) $h(x) = 1$
      (iii) $h(x) = 0$ dengan syarat $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$
      (iv) $h(x) = -1$ dengan syarat $f(x)$ dan $g(x)$ sama-sama genap atau sama-sama ganjil
   e) Jika $f(x)^{g(x)} = 1$, maka kemungkinannya adalah
      (i) $f(x) = 1$

(ii) $g(x) = 0$ dengan syarat $f(x) \neq 0$

(iii) $f(x) = -1$ dengan syarat $g(x)$ genap

f) Jika persamaan memiliki bentuk persamaan kuadrat seperti $A(a^{f(x)})^2 + B(a^{f(x)}) + C = 0$, maka dapat diselesaikan dengan memisalkan $a^{f(x)} = p$, kemudian menyelesaikan persamaan kuadrat yang terbentuk untuk x.

5. Pertidaksamaan ekponensial memiliki sifat-sifat sebagai berikut:
   a) Jika $a > 1$, maka $a^x < a^y \leftrightarrow x < y$
   b) Jika $0 < a < 1$, maka $a^x < a^y \leftrightarrow x > y$

Logaritma

1. Logaritma adalah *invers* atau kebalikan dari eksponensial. Pada eksponensial dinyatakan dalam bentuk $a^n = b$, sedangkan pada logaritma dinyatakan dalam bentuk ${}^{a}\log b = n$.
2. Fungsi logaritma dinyatakan dalam bentuk $y = {}^{a}\log x$ dengan $a > 0; a \neq 1$ dan $x > 0$
3. Grafik fungsi logaritma memiliki sifat:
   a) Kontinu
   b) Merupakan fungsi satu-satu
   c) Domain $x: > 0, x \in R$
   d) Range $y: (\infty, -\infty)$ atau $y \in R$
   e) Grafik $y = {}^{a}\log x$ naik jika $a > 1$
   f) Grafik $y = {}^{a}\log x$ turun jika $0 < a < 1$

g) Memotong sumbu $(1,0)$

h) Memiliki asimtot tegak sumbu y

4. Sifat-sifat logaritma

Jika $a > 0$ dan $a \neq 1, m > 0$ dan $m \neq 1, b > 0$ dan $c > 0$ maka berlaku hubungan berikut ini:

a) ${}^{a}\log 1 = 0$

b) ${}^{a}\log a = 1$

c) ${}^{a}\log b + {}^{a}\log c = {}^{a}\log(b.c)$

d) ${}^{a}\log b - {}^{a}\log c = {}^{a}\log(\frac{b}{c})$,

e) ${}^{a}\log b = \frac{{}^{m}\log b}{{}^{m}\log a}$

f) ${}^{a}\log b^{m} = m.\ {}^{a}\log b$

g) ${}^{a^{m}}\log b = \frac{1}{m}.\ {}^{a}\log b$

h) $a^{{}^{a}\log b} = b$

i) ${}^{a}\log b\ .\ {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$

j) ${}^{a}\log b = \frac{1}{{}^{b}\log a}$

k) ${}^{a}\log(\frac{b}{c}) = -\ {}^{a}\log(\frac{c}{b})$

5. Persamaan logaritma adalah persaman yang didalamnya terdapat logaritma di mana numerus ataupun bilangan pokok mengandung variabel. Berikut bentuk-bentuk fungsi persamaan logaritma:

a) ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p,\ a > 0; a \neq 1; f(x) > 0; p > 0$ maka $f(x) = p$

b) ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)\ \ a > 0; a \neq 1; f(x) > 0; g(x) > 0 \text{ maka } f(x) = g(x)$

c) ${}^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x),\ a > 0; a \neq 1; f(x) > 0; b > 0 \text{ maka } f(x) = 1$

d) ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)\ \ h(x) > 0; h(x) \neq 1; f(x) > 0; g(x) > 0 \text{ maka } f(x) = g(x)$

e) $A.\left({}^{a}\log^{2} f(x)\right) + B.\left({}^{a}\log f(x)\right) + C = 0\ ; a > 0; a \neq 1; f(x) > 0;\ \text{dan } A, B, C \in R$

maka untuk mencari nilai *x* yang memenuhi adalah dengan memisalkan ${}^{a}\log f(x) = p$, sehingga persamaannya menjadi $A.p^{2} + B.p + C = 0$

6. Pertidaksamaan fungsi logaritma merupakan bentuk lain dari persamaan fungsi logaritma, yaitu pertidaksamaan dengan variabelnya berada dalam suatu indeks yang memiliki tanda ketidaksamaan, yang meliputi $<, \leq, >, \text{atau} \geq$. Berikut sifat-sifat pertidaksamaan fungsi logaritma:
   a) Untuk $a > 1$

      ${}^{a}\log f(x) > {}^{a}\log g(x),\ \text{maka } f(x) > g(x) > 0$

      ${}^{a}\log f(x) < {}^{a}\log g(x),\ \text{maka } 0 < f(x) < g(x)$

   b) Untuk $0 < a < 1$

      ${}^{a}\log f(x) > {}^{a}\log g(x),\ \text{maka } 0 < f(x) < g(x)$

      ${}^{a}\log f(x) < {}^{a}\log g(x),\ \text{maka } f(x) > g(x) > 0$

F. Evaluasi

Kerjakan latihan soal berikut dengan tepat!!

1. Himpunan penyelesaian dari persamaan $2^{3x+2} = 16^{\frac{3}{4}}$ adalah .....
2. Nilai x yang merupakan penyelesaian dari $2^{2x+3} - 2^{x+5} - 2^{x} + 4 > 0$ adalah .....
3. Nilai dari $\frac{(81)^{\frac{3}{4}}}{(27)^{\frac{2}{3}}}$ adalah .....
4. Hasil dari $p^{-2}q^{8} \times p^{-4}q^{-5}$ adalah ....
5. Penyelesaian pertidaksamaan $5^{x^2-3x+7} < 5^{2x+1}$ adalah .....
6. Nilai dari $\left[\frac{{}^{3}\log 2 \times {}^{4}\log 27 + {}^{3}\log 81}{{}^{2}\log 12 - {}^{2}\log 6}\right]^{2}$ adalah .....
7. Diketahui ${}^{2}\log 3 = a$ dan ${}^{2}\log 25 = b$. Nilai ${}^{2}\log 45\sqrt{3}$ adalah .....
8. Bentuk sederhana dari $\log 24 - \log 2\sqrt{3} + 2\log\frac{1}{9} + \log 2\frac{1}{4}$ adalah .....
9. Diketahui ${}^{2}\log 3 = x$ dan ${}^{2}\log 25 = y$. Nilai ${}^{3}\log 60$ adalah..
10. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan ${}^{2}\log(x-2) + {}^{2}\log(x+6) > {}^{2}\log(x-8)$ adalah .....

*****

BAB 2
PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

A. Tujuan Pembelajaran

Tujuan pembelajaran bab persamaan dan pertidaksamaan kuadarat yaitu:

- Mahasiswa mampu menjelaskan definisi persamaan dan pertidaksamaan kuadrat.
- Mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal terkait persamaan dan pertidaksamaan kuadrat.
- Mahasiswa mampu memecahkan soal soal berbasis *Higher Order thinking Skills* terkait persamaan dan pertidaksamaan kuadrat.

B. Pendahuluan

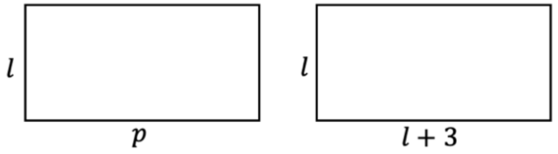
Persamaan kuadrat sering dijumpai pada jenjang sekolah, mulai dari SMP dan SMA. Materi yang dipelajari berisi tentang berbagai bentuk suku aljabar serta operasinya. Selain itu, pada jenjang sekolah juga mempelajari cara memfaktorkan dan menyederhanakan bentuk aljabar. Namun sebelum kalian mempelajari materi tentang persamaan dan pertidaksamaan kuadrat, cobalah mengingat kembali materi yang telah dipelajari pada jenjang sebelumnya dengan menjawab beberapa pertanyaan berikut:

1. Apakah yang dimaksud dengan kalimat terbuka dan kalimat tertutup dalam matematika? Tunjukkan dengan contoh.

2. Apakah kesamaan dan persamaan itu dua hal yang sama? Jika tidak, jelasakan masing-masing dengan contoh.
3. Apakah yang dimaksud dengan relasi dan fungsi?
4. Apakah yang dimaksud dengan penyelesaian?
5. Apakah yang dimaksud dengan himpunan penyelesaian?

C. Definisi Persamaan Kuadrat

Sebelum kalain melanjutkan ke materi lebih jauh tentang persamaan kuadrat, coba perhatikan gambar berikut:



(a) (b)

Gambar 2.1 Persegi Panjang

Misalkan sebuah persegi Panjang memiliki 3 cm lebih panjang daripada lebarnya (perhatikan gambar 2.1.(b)). Persegi Panjang itu memiliki luas 49 cm^2. Jika kita misalkan panjangnya p dan lebarnya l, maka luas persegi Panjang itu adalah $L = p \times l$. Karena $p = l + 3$ cm dan $L = 49$ cm^2 maka diperoleh sutau hubungan sebagai berikut:

$$L = p \times l$$

$$49 = (l + 3) \times l$$

$$49 = l^2 + 3l$$

$l^2 + 3l - 49 = 0$

Persamaan bentuk terakhir termasuk persamaan kuadrat, dengan variabel l. Selanjutnya, perhatikan bentuk-benuk persamaan berikut:

1. $x^2 + x - 4 = 0$
2. $x^2 - 16 = 0$
3. $2x^2 + 7x + 6 = 0$
4. $x^2 + 9 = 0$

Persamaan-persamaan di atas merupakan persamaan-persamaan dalam peubah/ veriabel x dimana pangkat tertingginya adalah dua. Persamaan-persamaan seperti diatas disebut sebagai persamaan kuadrat.

Persamaan kuadrat merupakan suatu persamaan yang memiliki pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat dua.

Misalkan a, b dan c anggota himpunan bilangan real R dan $a \neq 0$. Bentuk umum persamaan kuadrat dalam peubah x dinyatakan sebagai:

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ dan $a, b, c \in R$

Keterangan:

x adalah variabel dari Persamaan Kuadrat

a adalah koefisien x^2

b adalah koefisien x

c adalah konstanta

D. Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Sebuah persamaan kuadrat dapat diselesaikan dengan menentukan nilai pengganti x yang memebuhi persamaan itu. Nilai x yang memenuhi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ disebut **penyelesaian** atau akar dari persamaan kuadrat itu. Himpunan yang beranggoatakan akar-akar atau penyelesaian persamaaan kuadrat disebut **himpunan penyelesaian** persamaan kuadrat.

Misalkan terdapat persamaan kuadrat $x^2 + 2x - 3 = 0$, selanjutnya akan kita selidiki apakah $x = 1, x = -3$ dan $x = 0$ merupakan penyelesaian persamaan kuadarat $x^2 + 2x - 3 = 0$.

1. Subtitusikan nilai $x = 1$ ke persamaan kuadrat, maka akan diperoleh $1^2 + 2.1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$ yang merupakan pernyataan yang benar. Maka dari itu, $x = 1$ merupakan penyelesaian atau akar dari $x^2 + 2x - 3 = 0$.
2. Subtitusikan nilai $x = -3$ ke persamaan kuadrat, maka akan diperoleh $(-3)^2 + 2.(-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$ yang merupakan pernyataan yang benar. Maka dari itu, $x = -3$ merupakan penyelesaian atau akar dari $x^2 + 2x - 3 = 0$.
3. Subtitusikan nilai $x = 0$ ke persamaan kuadrat, maka akan diperoleh $0^2 + 2.0 - 3 = 0 + 0 - 3 = -3 \neq 0$. Karena nilai $x = 0$ tidak mengakibatkan persamaan

$x^2 + 2x - 3 = 0$ maka $x = 0$ bukan merupakan penyelesaian atau akar dari $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Penyelesaian dalam persamaan kuadrat merupakan cara menentukan nilai x agar persamaan tersebut menjadi pernyataan yang bernilai benar. Adapun cara dalam menyelesaian persamaan kuadrat terdiri dari:

1. Memfaktorkan

Cara pemfaktoran ini cukup mudah, dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ diuraikan menjadi $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ atau mencari nilai pembuat nol untuk masing-masing nilai x.

Secara umum, jika kita memiliki persamaan kuadrat yang dapat difaktorkan menjadi $\left(x + \frac{p}{a}\right)\left(x + \frac{q}{a}\right) = 0, a \neq 0$ maka kita dapat membentuk persamaan kuadrat itu menjadi bentuk baku sebagai berikut:

$$\left(x + \frac{p}{a}\right)\left(x + \frac{q}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{p}{a}x + \frac{q}{a}x + \frac{pq}{a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{p+q}{a}x + \frac{pq}{a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (p + q)x + \frac{pq}{a} = 0$$

Bandingkan persamaan terakhir dengan bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Dengan demikian, jika ruas kiri persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat difaktorkan menjadi

$\left(x+\frac{p}{a}\right)\left(x+\frac{q}{a}\right)=0$ maka diperoleh hubungan sebagai berikut:

$b=p+q$

$$c=\frac{pq}{a} \text{ atau } ac=pq$$

Contoh:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $2x^2+7x+6=0$.

Penyelesaian:

Terlebih dahulu kita cari dua bilangan yang jumlahnya 7 dan hasil kalinya $a\times c=2\times 6=12$. Bilangan-bilangan yang mungkin adalah 3 dan 4. Oleh karena itu diperoleh:

$$2x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow 2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{4}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{4}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{3}{2}=0 \text{ atau } x+\frac{4}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2} \text{ atau } x=-2$$

Jadi, akar-akar yang dimaksud pada persamaan diatas adalah $x=-\frac{3}{2}$ atau $x=-2$.

2. Menggunakan Rumus Kuadrat atau Rumus abc

Cara lain untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat adalah dengan rumus persamaan kuadrat biasa yang disebit **rumus abc**. Rumus ini diperoleh dengan melengkapkan kuadrat sempurna pada persamaan $ax^2+bx+c=0$. Terlebih dahulu persamaan tersebut diubah menjadi $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Dengan melengkapkan kuadrat sempurna diperoleh sebagai berikut:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Oleh karena itu, secara umum rumus untuk menemukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0\, , a \neq 0$ adalah:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Penulisan $x_{1,2}$ merupakan nilai dari x_1 dan x_2 sebagai akar-akar persamaan kuadrat. Sedangkan bentuk $b^2 - 4ac$ disebut **diskriminan** atau D. Nilai diskriminan akan dibahas pada sub materi berikutnya.

Contoh:

Dengan menggunakan rumus abc, tentukan penyelesaian dari persamaan kuadrat $x^2 + x - 12 = 0$.

Penyelesaian:

Berdasarkan persamaan kuadrat $x^2 + x - 12 = 0$ maka diperoleh nilai $a = 1, b = 1$ dan $c = -12$, selanjutnya dapat dimasukkan dalam rumus abc menjadi:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-12)}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$x_1 = \frac{-1+7}{2} = 3$ atau $x_2 = \frac{-1-7}{2} = -4$

Jadi, penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $x_1 = 3$ atau $x_2 = -4$.

3. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Pada dasarnya, setiap bentuk kuadrat dapat diubah menjadi suatu bentuk kuadrat sempurna dengan melakukan manipulasi secara aljabar, yaitu dengan menambah atau mengurangi bagian konstanta.

Perhatikan cara memperolah bentuk kuadarat sempurna berikut:

a. Bentuk $x^2 - 2x$ dapat diubah ke bentuk berikut:

$$x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1$$

$= (x - 1)^2 - 1$ (mengandung bentuk kuadrat sempurna $(x - 1)^2$).

b. Bentuk $x^2 - 4x + 3$ dapat diubah ke bentuk:

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1$$

$= (x-2)^2 - 1$ (mengandung bentuk kuadrat sempurna $(x-2)^2$).

Menyelesaikan persamaan kuadrat dengan melengkapkan kuadrat sempurna adalah mengubah persamaan kuadrat menjadi bentuk kuadrat sempurna. Bentuk umum persamaan kuadrat berbentuk kuadrat sempurna adalah $(x+p)^2 = q$, dengan $q > 0$.

Proses pengubahan suatu bentuk kuadrat menjadi bentuk kuadrat sempurna seperti diatas disebut **melengkapkan kuadrat sempurna**. Akar-akar suatu persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ dapat ditentukan dengan proses melengkapkan bentuk kuadrat sempurna dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Ubahlah koefisien x^2 menjadi 1.
b. Ubahlah persamaan kuadrat tersebut menjadi bentuk $(x-p)^2 = q$ untuk $q \geq 0$ dengan melengkapkan kuadrat sempurna.
c. Tentukan akar-akar persamaan kuadrat, yaitu $x - 1 = \pm\sqrt{q}$ atau $x = p \pm \sqrt{q}$.

Contoh:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + x - 2 = 0$ dengan melengkapkan kuadrat sempurna.

Penyelesaian:

$x^2 + x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 + 2 = 0 + 2$ ... (kedua ruas ditambah 2)

$\Leftrightarrow x^2 + x = 2$

$\Leftrightarrow x^2 + x + \left(\frac{1}{2}.1\right)^2 = 2 + \left(\frac{1}{2}.1\right)^2$...... (kedua ruasa ditambah dengan kuadrat dari setengah koefisien x).

$\Leftrightarrow x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

Jadi akar-akarnya adalah $x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$ atau $x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$.

Berdasarkan ketiga cara diatas, selanjutnya diskusikan dengan teman anda.

a. Cara manakah yang paling mudah digunakan untuk menyelesaikan persamaan kuadrat!

b. Sebutkan kelebihan dan kekurangan masing-masing dari ketiga cara menentukan penyelesaian persamaan kuadrat!

E. Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Jenis akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ ditentukan oleh nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$. Oleh karena itu akar-akar persamaan kuadrat antara lain:

1. $D > 0$ maka kedua akar nyata dan berlainan $(x_1 \neq x_2)$.
2. $D = 0$ maka kedua akar nyata dan sama $(x_1 = x_2)$.
3. $D < 0$ maka kedua akar tidak nyata (imaginer).
4. $D = k^2$, dengan k^2 adalah bilangan kuadrat sempurna kedua akar rasional.

F. Sifat-Sifat Akar Persamaan Kuadrat

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a \neq 0$ maka berlaku sifat-sifat berikut ini:

1. Syarat mempunyai dua akar positif
   - $D \geq 0$
   - $x_1 + x_2 > 0$
   - $x_1 . x_2 > 0$
2. Syarat mempunyai dua akar negatif
   - $D \geq 0$
   - $x_1 + x_2 < 0$
   - $x_1 . x_2 > 0$
3. Syarat mempunyai dua akar berlainan tanda
   - $D \geq 0$
   - $x_1 . x_2 < 0$

4. Syarat mempunyai dua akar berlawanan
   - $x_1 + x_2 = 0$
5. Syarat mempunyai dua akar berkebalikan
   - $x_1 . x_2 = 1$

G. Menyusun Persamaan Kuadrat Baru

Kadang kala kita dalam sebuah soal diberikan akar-akar suatu persamaan kuadrat. Lalu kita diminta menyusun bagaimana bentuk persamaannya. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya x_1 dan $x_2$dapat disusun dengan cara:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 . x_2 = 0$$

H. Fungsi Kuadrat

Fungsi Kuadrat merupakan suatu fungsi yang pangkat variabel tertingginya adalah dua. Bentuk umum: $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$dan $a, b, c \in R$

Grafik fungsi kuadrat berupa parabola. Hal ini dapat dilihat dari berapa nilai a dalam fungsi kuadrat tersebut. Grafik fungsi kuadrat terdiri dari:

1. Jika $a > 0$ maka parabola terbuka ke atas
2. Jika $a < 0$ maka parabola terbuka ke bawah

Dalam grafik fungsi kuadarat, kita dapat menentukan titik potongnya. Titik potong terhadap sumbu-sumbu koordinat terdiri atas dua macam yaitu:

1. Titik potong terhadap Sumbu X

   Agar grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ memotong sumbu X. maka nilai y haruslah sama dengan nol (0).

   $$y = 0 \leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$
   $$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

   Koordinat titik potongnya $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$.

2. Titik potong pada sumbu Y

   Agar grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ memotong sumbu Y, maka nilai x haruslah sama dengan nol (0)

   $$x = 0 \leftrightarrow y = a(0)^2 + b(0) + c$$
   $$y = c$$

   Koordinat titik potongnya adalah $(0, c)$

3. Titik Puncak/Titik Balik dan Sumbu Simetri

   Bentuk $y = ax^2 + bx + c$ dapat ditulis menjadi:

   $$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$$

   $x =$ sumbu simetri (penyebab ekstrim)

   $y =$ nilai ekstrim

   - Jika $a > 0$ maka $y_{eks} = y_{min}$
   - Jika $a < 0$ maka $y_{eks} = y_{max}$

     Titik Puncak Parabola : $\frac{-b}{2a}, \frac{b^2-4ac}{-4a}$

   - Jika $a > 0$ maka titik puncak adalah titik balik minimum dan parabola terbuka ke atas

- Jika $a < 0$ maka titik puncak adalah titik balik maksimum dan parabola terbuka ke bawah

4. Kegunaan Diskriminan pada Fungsi Kuadrat
   a. Mengetahui hubungan parabola dengan sumbu X
      1) Jika $D > 0 \rightarrow$ parabola memotong sumbu X dua titik
      2) Jika $D = 0 \rightarrow$ parabola menyinggung sumbu X
      3) Jika $D < 0 \rightarrow$ parabola tidak menyinggung ataupun memotong sumbu X

   b. Mengetahui hubungan parabola dengan garis

      Untuk menentukan apakah suatu garis itu memotong atau tidak memotong parabola, maka dapat dilakukan dengan cara mensubstitusikan garis ke parabola, dan hasilnya seperti di bawah ini:
      1) Jika $D > 0 \rightarrow$garis memotong parabola di dua titik.
      2) Jika $D = 0 \rightarrow$garis menyinggung parabola (berpotongan di suatu titik).
      3) Jika $D < 0 \rightarrow$garis tidak menyinggung ataupun memotong parabola

5. Menentukan Persamaan Kurva dari Fungsi Kuadrat

   Untuk menentukan persamaan kurva jika grafik fungsi kuadratnya diketahui dapat dilakukan dengan cara berikut:

   a. Jika diketahui titik puncak = (x_p, y_p), gunakan rumus:

      $y = a(x - x_p)^2 + y_p$

b. Jika diketahui titik potong dengan sumbu X yakni $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ gunakan rumus: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

c. Jika yang diketahui selain titik pada poin a dan b, maka gunakan rumus: $y = ax^2 + bx + c$

I. Pertidaksamaan Kuadrat dan Penyelesaiannya

Pertidaksamaan kuadrat yaitu pertidaksamaan yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah dua dan memuat tanda ketaksamaan. Langkah-langkah menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat:

1. Pindahkan semua suku ke ruas kiri.
2. Tentukan nilai-nilai pembuat nol ruas kiri.
3. Tuliskan nilai-nilai tersebut pada garis bilangan dengan memberi lingkaran penuh bila ada tanda sama dengannya atau lingkaran kosong bila tidak pakai sama dengan.
4. Berikan tanda setiap interval, dengan cara memasukkan suatu bilangan pada setiap interval sehingga diketahui nilainya (positif atau negatif).
5. Arsir interval-interval yang mempunyai tanda sesuai dengan soal. Interval-interval yang diarsir tersebut merupakan penyelesaian.

J. Contoh-Contoh Soal

Kerjakan soal berikut dengan benar!

1. Dengan menggunakan cara pemfaktoran, tentukan akar-akar persamaan dari $-3 + 2x + x^2 = 0$!

Penyelesaian:

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x^2 + 2x = 3$

$(x + 1)^2 - 1 = 3$

$(x + 1)^2 = 3 + 1$

$(x + 1)^2 = 4$

$x + 1 = \pm\sqrt{4}$

$x + 1 = \pm 2$

$x = -1 \pm 2$

$x_1 = -1 + 2 = 1 \; atau \; x_2 = -1 - 2 = -3$

Jadi akar-akar persamaan kuadrat $-3 + 2x + x^2 = 0$ adalah $x_1 = 1$ atau $x_2 = -3$

2. Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut:
   a. $x^2 < 8x - 15$
   b. $2x^2 - 3x - 5 \geq 0$

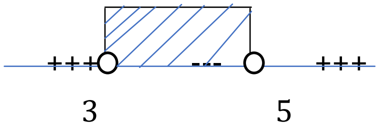
   Penyelesaian:

   a. $x^2 < 8x - 15$ maka diperoleh:

   $x^2 - 8x + 15 < 0$

   $(x - 3)(x - 5) < 0$ (Cara Pemfaktoran)

   $x = 3 \; dan \; x = 5$ (Pembuat Nol)

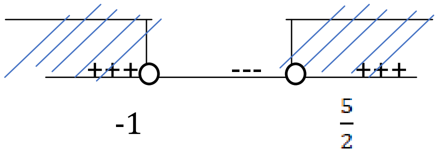


   Himpunan Penyelesaiannya = $\{x | 3 < x < 5\}$

   b. $2x^2 - 3x - 5 \geq 0$ maka diperoleh:

   $(2x - 5)(x + 1) \geq 0$ Cara Pemfaktoran

$x = \frac{5}{2}$ dan $x = -1$(Pembuat Nol)



Himpunan Penyelesaiannya = $\left\{x | x < -1 \; atau \; x > \frac{5}{2}\right\}$.

3. Jika α dan β merupakan suatu akar-akar real persamaan

   $2x^2 + x = \frac{8}{4x^2+2x+6}$ maka nilai α . β adalah . . .

   Penyelesaian:

   $2x^2 + x = \frac{8}{4x^2+2x+6}$

   $2x^2 + x = \frac{8}{2(2x^2+x+3)}$

   $2x^2 + x = \frac{4}{2x^2+x+3}$

   Misal $2x^2 + x = p$

   $p = \frac{4}{p+3}$

   $p^2 + 3p - 4 = 0$

   $(p + 4)(p - 1) = 0$

   $p = -4 \; \& \; p = 1$

   - Untuk $p = -4$

     $2x^2 + x = -4$

     $2x^2 + x + 4 = 0$

     nilai $\alpha . \beta = \frac{c}{a} = 2$

     Syarat akar-akar real $D > 0$

     $D = b^2 - 4ac = -31$ (Tidak memenuhi)

- Untuk $p = 1$

  $2x^2 + x = 1$

  $2x^2 + x - 1 = 0$

  nilai $\alpha . \beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$

  Syarat akar-akar real D > 0

  $D = b^2 - 4ac = 9$ (memenuhi)

  Jadi, nilai $\alpha . \beta = -\frac{1}{2}$

4. Pak Heru memiliki sebuah kebun dengan bentuk persegi panjang dan luas 1200 m^2. Selisih panjang kebun dan lebarnya adalah 10 m. Apabila disekeliling kebun dibuat jalan dengan lebar 1.5 m, maka berapa meter persegikah luas jalan?

   Penyelesaian:

   Luas tanah memiliki bentuk persegi panjang

   $L = 1200m^2$

   $p - l = 10m$

   $p = 10 + l$

   Lebar jalan = 1.5 meter

   $L = p \times l$

   $1200 = (10 + l) \times l$

   $1200 = 10l + l^2$

   $l^2 + 10l - 1200 = 0$

   $(l + 40)(l - 30) = 0$

   $l = -40$ atau $l = 30$

   Lebar tanah yang memenuhi adalah 30 meter. Sehingga $p = 10 + l = 10 + 30 = 40\ meter$.

Untuk mencari luas jalan dapat dilakukan dengan mencari selisih antara luas tanah dengan luas tanah yang tidak terkena jalan.

Luas Jalan = Luas Tanah – Luas Tanah yang tidak terkena jalan

$= 1200 - (40 - 1.5) \times (30 - 1.5)$

$= 1200 - (38.5) \times (28.5)$

$= 1200 - 1097.25$

$= 102.75\ m^2$

5. Akar-akar persamaan kuadrat $st^2 - 3st = -5s + 15$ adalah $t_1\ dan\ t_2$, jika $t_1^3 + t_2^3 = 117$, maka $s^2 + s = \ldots$

   Penyelesaian:

   $t_1 + t_2 = \frac{-(-3s)}{s} = 3$

   $t_1 . t_2 = \frac{5(s-3)}{s}$

   $t_1^3 + t_2^3 = (t_1 + t_2)^3 - 3t_1 . t_2 (t_1 + t_2) = 117$

   $= (3)^3 - 3.\left(\frac{5(s-3)}{s}\right).(3) = 117$

   $= -9\left(\frac{5(s-3)}{s}\right) = 117 - 27$

   $\left(\frac{5(s-3)}{s}\right) = -10 \longrightarrow 5s - 15 = -10s$

   $15s = 15$, jadi $s = 1$

   Maka $s^2 + s = (1)^2 + (1) = 2$

6. Akar-akar persamaan kuadrat $n^2 - mn = -2m + 7$ adalah n_1 dan n_2. Jika $2n_1 - n_2 = 7$ maka nilai m adalah…

   Penyelesaian:

Akar-akar persamaan n^2 - mn + (2m – 7) = 0 adalah n_1 dan n_2

Jika $2n_1$-n_2 = 7

$\underline{n_1 + n_2 = m}$ +

$3n_1 = 7 + m$

$n_1 = \frac{7+m}{3}$; $n_2 = 2n_1 - 7$

$n_2 = 2\left(\frac{7+m}{3}\right) - \left(\frac{21}{3}\right) = \frac{2m-7}{3}$

Maka $n_1.n_2$ = 2m – 7

$\left(\frac{7+m}{3}\right).\left(\frac{2m-7}{3}\right)$ = 2m – 7

$2m^2 + 7m - 49 = 18m - 63$

$2m^2 - 11m + 14 = 0$

$(2m - 7)(m - 2) = 0 \longrightarrow$ $m_1 = \frac{7}{2}$ dan $m_2 = 2$

7. $\propto_n$ *dan* β_n adalah akar-akar persamaan $x^2 + (2n+1)x + n^2 = 0$, nilai

$$\frac{1}{(\alpha_3+1)(\beta_3+1)} + \frac{1}{(\alpha_4+1)(\beta_4+1)} + \cdots + \frac{1}{(\alpha_{20}+1)(\beta_{20}+1)} = \cdots$$

Penyelesaian:

$x^2 + (2n+1)x + n^2 = 0$

$\propto_n + \beta_n = \frac{-b}{a} = -2n - 1$ dan $\propto_n \ \beta_n = \frac{c}{a} = n^2$

$(\propto_n + 1)(\beta_n + 1) = \propto_n \ \beta_n + (\propto_n + \beta_n) + 1$

$= n^2 + (-2n - 1) + 1$

$= n^2 - 2n = (n - 2)$

$$\frac{1}{(\alpha_3+1)(\beta_3+1)}+\frac{1}{(\alpha_4+1)(\beta_4+1)}+\cdots$$

$$+\frac{1}{(\alpha_{20}+1)(\beta_{20}+1)}$$

$$=\frac{1}{3.1}+\frac{1}{4.2}+\frac{1}{5.3}+\cdots+\frac{1}{19.17}+\frac{1}{20.8}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3.1}+\frac{2}{4.2}+\frac{2}{5.3}+\cdots\frac{2}{19.17}+\frac{2}{20.8}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{18}-\frac{1}{20}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{380}{380}+\frac{190}{380}-\frac{20}{380}-\frac{19}{380}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{531}{380}=\frac{531}{760}$$

Berapa jumlah nilai yang menyebabkan pernyataan "jika $x^2+x=6$ maka $x^2+3x<9$ bernilai salah"?

Penyelesaian:

pernyataan implikasi "jika p maka q" akan bernilai salah hanya jika p benar dan q salah.

$$p : x^2+x=6$$

$$x^2+x-6=0$$

$$(x+3)(x-2)=0$$

Nilai x yang memuat pernyataan p bernilai benar adalah $x=-3$ dan $x=2$

$$q : x^2+3x<9$$

Untuk $x=-3$ maka $(-3)^2+3(-3)<9$

$$9-9 < 9$$

$$0 < 9 \quad \text{(benar)}$$

Untuk $x=2$ maka $(2)^2+3(2)<9$

$$4+6<9$$

$$10<9 \qquad \text{(salah)}$$

Jadi nilai x yang memuat pernyataan "jika $x^2+x=6$ maka $x^2+3x<9$ bernilai salah ada 1 yaitu $x = 2$.

8. Jika m dan akar-akar persamaan kuadrat $x^2-2x+3=0$. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{`1}{m^2+2}$ dan $\frac{`1}{n^2+2}$ adalah.......

Penyelesaian:

$x^2-2x+3=0$ akar-akarnya m dan n

$m+n = \frac{-b}{a} = 2 \qquad m.n = \frac{c}{a} = 3$

$$\frac{`1}{m^2+2} . \frac{`1}{n^2+2} = \frac{`1}{m^2n^2+2m^2+2n^2+4}$$

$$= \frac{`1}{(mn)^2+2\{(m+n)^2-2mn\}+4}$$

$$= \frac{1}{9+2(4-6)+4} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{`1}{m^2+2} . \frac{`1}{n^2+2} = \frac{m^2+n^2+4}{(m^2+2)(n^2+2)}$$

$$= [(m+n)^2 - 2mn+4] . \frac{1}{(m^2+2)(n^2+2)}$$

$$= (4-6+4) . \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

Persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{`1}{m^2+2}$ $dan$ $\frac{`1}{n^2+2}$ adalah:

$$x^2 - \left[\frac{`1}{m^2+2} + \frac{`1}{n^2+2}\right] x + \frac{`1}{m^2+2} . \frac{`1}{n^2+2} = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} = 0$$

$$9x^2 - 2x + 1 = 0$$

9. Ali dan Haydar bisa menyelesaikan suatu pekerjaan secara bersama-sama selama 4 hari dalam membuat design Masjid di Jakarta, karena keduanya adalah seorang Arsitek. Jika Ali secara mandirimampu menyelesaikan pekerjaan tersebut selama 6 hari lebih cepat dibandingkan jika Haydar menyelesaikan secara mandiri. Dalam berapa harikah Haydar mampu menyelesaikan pekerjaan tersebut secara mandiri?

   Penyelesaian:

   Misal:

   Waktu pengerjaan Ali = x hari

   Waktu Pengerjaan Haydar = y hari

   Ali secara mandiri mampu menyelesaikan pekerjaan tersebut 6 hari lebih cepat dibandingkan jika Haydar menyelesaikan secara mandiri. Sehingga diperoleh:

   $x = y + 6$

   Dalam 1 hari Ali mampu menyelesaikan pekerjaan $\frac{1}{x}$ bagian sedangkan Desta menyelesaikan $\frac{1}{y}$ bagian.

   Jika kedua orang tersebut bekerja bersama-sama, maka waktu yang dibutuhkan adalah:

   $$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 4 \rightarrow 1 = 4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

   Karena $x = y + 6$ maka diperoleh:

   $$4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 1 \rightarrow 4\left(\frac{1}{y+6}+\frac{1}{y}\right) = 1$$

   $$4\left(\frac{y+(y+6)}{y(y+6)}\right) = 1 \rightarrow 4\left(\frac{2y+6}{y(y+6)}\right) = 1$$

$$4(2y+6)=(y^2+6y)$$
$$y^2-2y-24=0$$
$$(y+4)(y-6)=0$$
$$y=-4 \text{ atau } y=6$$

Nilai y yang memenuhi adalah 6. Jadi Haydar dapat menyelesaikan pekerjaan secara mandiri selama 6 hari.

K. Rangkuman

1. Persamaan kuadrat merupakan suatu persamaan yang memiliki pangkat tertinggi dari variabelnya adalah dua
2. Cara menyelesaikan persamaan kuadrat terdiri dari tiga cara, yaitu cara pemfaktoran, rumus abc, dan melengkapkan kuadrat sempurna
3. Pertidaksamaan kuadrat yaitu pertidaksamaan yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah dua
4. Cara penyelesaian pertidaksamaan kuadrat yaitu dengan memindahkan semua suku ke ruas kiri, kemudian menentukan nilai-nilai pembuat nol ruas kiri, menuliskan nilai-nilai tersebut pada garis bilangan dengan memberi lingkaran penuh bila ada tanda sama dengannya atau lingkaran kosong bila tidak pakai sama dengan, memberikan tanda setiap interval, dengan cara memasukkan suatu bilangan pada setiap interval sehingga diketahui nilainya (positif atau negatif), dan mengarsir interval-interval yang mempunyai tanda sesuai dengan soal. Interval-

interval yang diarsir tersebut merupakan penyelesaian

L. Evaluasi

Kerjakan soal berikut dengan tepat!

1. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan: $x^2 + 4x - 12 \leq 0,\ x \in R$ adalah?
2. Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan: $(2x - 2)^2 < (5 - x)^2$?
3. Jika grafik fungsi $y = x^2 + px + q$ mempunyai titik puncak (1,3) maka nilai p dan q adalah?
4. Berapakah nilai k yang harus diambil supaya $f(x) = kx^2 + 16x + 4k$ selalu mempunyai nilai positif?
5. Dua persamaan kuadrat memiliki akar-akar bilangan asli. Persamaan kuadrat yang pertama memiliki akar-akar a dan b, sedangkan persamaan kuadrat yang kedua memiliki akar-akar b dan c, dengan $c \neq a$. Jika $a, b,$ dan c merupakan bilangan prima kurang dari 15, ada berapa macam pasangan persamaan kuadrat yang memenuhi persyaratan tersebut?
6. Ibu Maria seorang milyuner memiliki lahan berupa tamanberbentuk persegi panjangdengan luas 12.500 m^2. Selisih panjang taman dan lebarnya adalah 112 m. Apabila disekeliling taman dibuat jalan dengan lebar 10 m, maka berapa meter persegikah luas jalan pada taman Ibu Maria?

7. Jika p dan q merupakan akar-akar persamaan kuadrat$x^2 - (a+1)x + \left(-a - \frac{3}{2}\right) = 0$,maka nilai minimum $p^2 + q^2$adalah?
8. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat $11(x - 2)^2 \leq (x + 3)^2$ adalah?

*****

BAB 3
KOMBINATORIK

A. Tujuan Pembelajaran

Tujuan pembelajaran pada bab kombinatorik antara lain:

- Mahasiswa mampu memahami konsep peluang, macam-macam peluang kejadian, serta kaidah perklaian dan penjumlahan.
- Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan peluang.
- Mahasiswa mampu memahami konsep permutasi dan kombinasi.
- Mahasiwa mampu menyelesaikan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan permutasi dan kombinasi.

B. Definisi Peluang

Persoalan kombinatorik bukan merupakan persoalan yang baru dalam kehidupan nyata. Banyak persoalan kombinatorik yang sederhana telah diselesaikan dalam masyarakat. Misalkan, saat pemilihan pemain untuk tim sepak bola yang terdiri dari 11 pemain. Apabila ada 20 orang ingin membentuk suatu tim sepak bola, ada berapa kemungkinan komposisi pemain yang dapat terbentuk? Contoh lain adalah dalam menentukan sebuah password panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka.

Berapa banyak kemungkinan password yang dapat dibuat?

Selain itu, para ilmuwan pada berbagai bidang juga kerap menemukan sejumlah persoalan yang harus diselesaikan. Pada Bab ini, kita akan membahas tentang kaidah perkalian dan penjumlahan, permutasi, kombinasi dan apa yang terkait dengan itu. Kombinatorik merupakan cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek- objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

1. Peluang

Nilai-nilai peluang yang didapatkan berkisar antara 0 hingga dengan 1. Untuk masing-masing kejadian A, batas-batas dari nilai $P(A)$ secara matematis dapat kita tuliskan seperti berikut ini:

$\mathbf{0 \leq P\,(A) \leq 1}$ dengan $P(A)$ merupakan peluang suatu kejadian A.

Apabila $P(A) = 0$, maka kejadian A merupakan kejadian yang mustahil, maka peluangnya tak lain adalah 0.

Contoh:

1) Matahari yang terbit di sebelah selatan merupakan suatu kejadian yang mustahil, sehingga peluangnya tak lain adalah $= 0$. Apabila $P(A) = 1$, maka kejadian A merupakan kejadian pasti. Terdapat juga peluang kejadian yang bernilai antara 0 dan 1, yang artinya kejadian tersebut mungkin terjadi.

2) Makhluk yang bernyawa pasti nanti akan mati hal itu adalah suatu kejadian pasti, sehingga peluangnya adalah = 1

Probabilitas atau peluang suatu kejadian A terjadi dilambangkan dengan notasi $P(A), p(A)$, atau $Pr(A)$. Sebaliknya, probabilitas (bukan A) atau komplemen A, atau probabilitas suatu kejadian A tidak akan terjadi, adalah $1 - P(A)$.

Contoh:

1) Peluang seorang murid untuk menjadi juara kelas. Apabila L adalah kejadian komplemen dari kejadian A maka peluang dari kejadian L merupakan 1-peluang kejadian A. Secara matematis dapat ditulis sebagai:
2) $P\ (L) = 1 - P(A)$ atau bisa juga $P(L) + P(A) = 1$
3) Apabila peluang turun hujan pada hari ini adalah = 0,6. Maka peluang untuk tidak turun hujan pada hari ini adalah
   = 1 – P (hujan)
   = 1 – 0,6 = 0,4

Untuk menentukan rumus peluang kejadian menggunakan ruang sampel (biasanya disimbolkan dengan S) dan suatu kejadian. Jika A adalah suatu kejadian atau peristiwa, maka A adalah anggota dari himpunan ruang sampel S. Peluang kejadian A adalah:

$P(A) = n(A)/\ n(S)$

Keterangan:

$N(A)$ = banyak anggota himpunan kejadian A

$n(S)$ = banyak anggota dalam himpunan ruang sampel S

Contoh:

1) Sebuah dadu dilempar satu kali. Tentukan peluang ketika:
   a. Kejadian A munculnya mata dadu dengan angka prima
   b. Kejadian munculnya mata dadu dengan jumlah kurang dari 6 Jawab:

   Penyelesaian:

   Percobaan melempar dadu menghasilkan 6 kemungkinan yaitu munculnya mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, 6, sehingadapat dituliskan bahwa $n\ (S) = \ 6$

   a. Pada pertanyaan munculnya mata dadu prima, yaitu peristiwa angka yang muncul merupakan bilangan prima, yaitu 2, 3, dan 5. Sehingga dapat dituliskan jumlah kejadian $n(A) \ = \ 3$. Jadi nilai peluang dari kejadian A tersebut adalah sebagai berikut:

      $P(A) \ = \ n(A)/\ n(S)$

      $P(A) \ = \ 3/6 \ = \ 0{,}5$

   b. Pada kejadian B, yaitu peristiwa muncul mata dadu dengan jumlah kurang dari 6. Kemungkinan angka yang muncul yaitu 1, 2, 3, 4, dan 5.

Jadi nilai peluang dari kejadian B tersebut adalah sebagai berikut:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{6}$$

2. Frekuensi Harapan

Frekuensi harapan dalah sebuah kejadian merupakan suatu harapan banyaknya muncul pada sebuah kejadian dari sejumlah percobaan yang dilakukan. Secara umum rumus dari frekuensi harapan adalah sebagai berikut:

$$F_h(A) = n.P(A)$$

Keterangan:

$F_h(A)$ = frekuensi harapan suatu kejadian A

n = banyaknya kejadian A

$P(A)$ = peluang suatu kejadian A

Contoh:

1) Dua buah mata dadu dilempar secara bersama-sama sebanyak 144 kali.

   Penyelesaian:

   Untuk menyelesaikan soal seperti ini pertama kali hitung dulu banyaknya seluruh nilai kejadian. Seluruh kejadian dilambangkan dengan S, maka:

Tabel 3.1 Ruang sampel Dua Dadu

Dadu pertama

Dadu kedua

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$n(s)$ = banyaknya anggota semesta = 36

Sehingga banyaknya anggota dari semesta bilangan tersebut ialah $n(s) = 36$.

Munculnya angka enam di kedua mata dadu. Untuk yang muncul dua-duanya angka enam hanyalah satu yaitu (6,6), maka: $n(1) = 1$

Banyaknya percobaan yaitu sebanyak 144 kali, maka n=144 Sehingga, $F_h(A) = n.P(A)$

$$F_h(A) = 144 \times \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$F_h(A) = 144 \times \frac{1}{36}$$

$$F_h(A) = 4$$

Jadi, frekuensi harapan munculnya angka enam pada kedua dadu adalah sebanyak 4 kali.

2) Dalam percobaan pengetosan sebuah dadu yang dilakukan sebanyak 60 kali, maka peluang muncul mata 2 adalah = 1/6. Frekuensi harapan muncul

mata 2 adalah = P(mata 2) x banyak percoban = 1/6 x 60 = 10 kali.

C. Peluang Kejadian

Suatu kejadian mempengaruhi ruang sampel serta peluangnya. Peluang dalam suatu kejadian dapat dilihat sebagaiberikut:

1. Kejadian Majemuk

Kejadian majemuk adalah kejadian baru yang terbentuk dari perlakuan pada dua atau lebih kejadian. Kejadian majemuk merupakan dua atau lebih kejadian yang dioperasikan sehingga akan membentuk sebuah kejadian yang baru. Sebuah kejadian K serta kejadian komplemen berupa K' memenuhi persamaan:

$$P(K) + P(K') = 1 \text{ atau } P(K') = 1 - P(K)$$

2. Kejadian Saling Bebas

Terdapat dua buah kejadian A dan B yang kemudian disebut kejadian saling lepas jika tidak ada elemen pada kejadian A yang sama dengan elemen yang terdapat pada kejadian B.

Peluang salah satu A atau B mungkin terjadi dengan A dan B adalah kejadian saling lepas, rumusnya adalah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Contoh:

1) Terdapat dua buah dadu, biru dan hijau. Dua dadu tersebut kemudian dilempar secara bersamaan satu

kali, tentukan peluang munculnya sisi dadu yang memiliki jumlah 3 atau 10!

Pembahasan:

Hasil pelemparan dadu tersebut kemudian dituliskan dalam table di bawah ini.

Tabel 3.2 Hasil Pelemparan Dua Dadu

	Dadu Merah						
Dadu Biru		1	2	3	4	5	6
	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Munculnya mata dadu berjumlah 3

$A = \{(1,2), (2,1)\}$

$n(A) = 2$

Munculnya mata dadu berjumlah 10

$B = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$

Karena anggota A tidak ada yang sama dengan anggota B, maka kejadian A dan B merupakan dua kejadian yang saling lepas sehingga menggunakan rumus:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36}$

$P(A \cup B) = \frac{5}{36}$

Sehingga peluang munculnya mata dadu yang berjumlah 3 atau 10 adalah $\frac{5}{36}$.

3. Kejadian Tidak Saling Lepas

Kejadian ini merupakan kebalikan dari kejadian saling lepas. Terdapat irisan antara kejadian A dan kejadian B, sehingga rumusnya dapat dituliskan seperti ini:

$$P\ (A \cup B)\ =\ P(A)\ +\ P(B) - P(A \cap B)$$

4. Kejadian Saling Bebas

Dua buah kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika munculnya kejadian A tidak mempengaruhi kejadian B. Peluang kejadian A dan B terjadi bersama sama adalah

$$P(A \cap B)\ =\ P(A)\ \times\ P(B)$$

Contoh:

Andi melempar dua buah dadu, berapakah peluang muncul angka genap prima pada dadu pertama dan angka ganjil pada dadu kedua!

Penyelesaian:

Misalkan A = kejadian muncul mata dadu genap prima pada dadu pertama $A = \{2\}$, maka $P(A)\ =\ 1/6$.

Misalkan B = kejadian muncul mata dadu ganjil pada dadu kedua $=\ \{1,3,5\}$ maka $P(B)\ =\ 3/6$.

Kejadian A tidak mempengaruhi kejadian B, maka digunakan rumus:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Jadi, peluang muncul angka genap prima pada dadu pertama dan angka ganjil pada dadu kedua adalah 0,5.

5. Kejadian Bersyarat

Jika terdapat dua kejadianya itu kejadian A dan kejadian B, kejadian tersebut dikatakan kejadian bersyarat jika kejadian A mempengaruhi terjadinya kejadian B atau sebaliknya, kemudian dapat dituliskan sebagai berikut ini.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

atau

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

Contoh:

Terdapat kotak yang memuat 5 bola kuning dan 4 bola biru. Jika diambil dua buah bola, secara satu per satu dan tanpaada pengembalian, maka berapakah peluang bola yang diambil adalah bola kuning pada pengambilan pertama dan bola biru pada pengambilan kedua!

Penyelesaian:

Pada pengambilan pertama tersedia 5 bola kuning dari 9 bola yang tersedia. Maka $P(K) = 5/9$.

Pada pengambilan kedua tersedia 4 bola biru dari 8 bola yang tersisa (syarat: bola kuning telah diambil). Maka $P(B|K) = 4/8$

Karena kejadian tersebut saling mempengaruhi, kemudian digunakanlah rumus:

$$P(K \cap B) = P(K) \times P(B|K)$$

$$P(K \cap B) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$$

Jadi, peluang bola yang terambil adalah bola merah pada pengambilan pertama dan bola hijau pada pengambilan kedua adalah 5/18.

D. Kaidah Perkalian dan Pernjumlahan

Dua buah kaidah dasar yang digunakan sebagai dasar teknik menghitung dalam kombinatorial adalah kadiah perkalian dan kaidah penjumlahan.

1. Kaidah perkalian

Bila percobaan 1 mempunyai p hasil percobaan yang mungkin terjadi (atau menghasilkan p kemungkinan jawaban), percobaan 2 mempunyai q hasil percobaan yang mungkin terjadi (atau menghasilkan q kemungkian jawaban), maka bila percobaan 1 dan percobaan 2 dilakukan, maka terdapat $p \times q$ hasil percobaan (atau menghasilkan $p \times q$ kemungkinan jawaban).

Atau misalnya ada n tempat yang dapat diisi dengan a_1 adalah banyaknya cara untuk mengisi tempat pertama, a_2 adalah banyak cara mengisi tempat kedua, dan seterusnya hingga an adalah banyak cara untuk mengisi tempat ke-n. Maka total cara untuk mengisi n tempat tersebut adalah:

$$a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$$

2. Kaidah Penjumlahan

Bila percobaan 1 mempunyai p hasil percobaan yang mungkin terjadi (atau menghasilkan p kemungkinan jawaban), percobaan 2 mempunyai q hasil percobaan yang mungkin terjadi (atau menghasilkan q kemungkinan jawaban) maka bila hanya satu percobaan saja yang dilakukan (percobaan 1 atau percobaan 2), terdapat $p + q$ kemungkinan hasil percobaan (menghasilkan $p + q$ kemungkinan jawaban) yang mungkin terjadi.

Atau jika ada A dan B yang merupakan himpunan saling lepas dengan banyak anggota himpunannya adalah x dan y, maka banyaknya cara mengambil satu anggota dari gabungan keduanya akan sama dengan $x + y$.

Secara sederhana digunakan saat ada sejumlah kejadian yang tidak saling berhubungan (saling lepas). Dalam kondisi ini kejadian-kejadian tersebut dijumlahkan untuk mendapatkan total kejadian yang mungkin terjadi.

3. Perluasan Kaidah Menghitung

Kaidah perkalian dan penjumlahan di atas dapat diperluas hingga mengandung lebih dari dua buah percobaan. Jika n buah percobaan masing-masing mempunyai $p_1, p_2, \ldots p_n$, hasil percobaan yang mungki terjadi yang dalam hal ini setiap p_i tidak bergantung pada pilihan sebelumnya, maka jumlah hasil percobaan yang mungkin terjadi adalah:

$p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ untuk kaidah perkalian.

$p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ untuk kaidah penjumlahan.

Contoh:

1) Dari kota A ke kota B ada beberapa jenis angkutan yang dapat digunakan. Ada 4 travel, 2 kapal laut, dan 1 pesawat terbang yang dapat dipilih. Ada berapa total cara berbeda untuk berangkat dari kota A menuju kota B?

   Penyelesaian:

   Dalam soal di atas ketika kita memilih travel, kapal laut, maupun pesawat terbang tidak berpengaruh satu sama lain, ketiganya merupakan himpunan yang saling lepas. Sehingga ada $4 + 2 + 1 = 7$ cara berbeda untuk berangkat dari kota A menuju kota B.

2) Jabatan ketua himpunan dapat diampu oleh mahasiswa angkatan 2015 atau angkatan 2016. Jika terdapat 45 orang mahasiswa angkatan 2015 dan 52 orang mahasiswa angkatan 2016 yang mingikuti himpunan mahasiswa, berapa cara memilih ketua himpunan?

   Penyelesaian:

   Jabatan yang ditawarkan hanya ada satu, yang dapat diampu oleh dua angkatanyang ada. Dalam kombinatorial, dari kedua kejadian, hanya satu dari dua kejadian yang dilakukan, sehingga menggunakan kaidah penjumlahan, jumlah cara memilih ketua himpunan tersebut sama dengan jumlah mahasiswa pada kedua angkatan, yaitu $45 + 52 = 97$ cara.

3) Sebuah rumah makan menyediakan menu makanan pagi yang terdiri atas nasi, telur, kerupuk, dan minum. Nasi terdiri dari nasi putih, nasi kuning dan nasi goreng. Telur terdiri dari telur dadar, telur ceplok, telur asin dan telur rebus. Kerupuk terdiri dari kerupuk udang, kerupuk ikan, kerupuk melinjo. Minum terdiri dari air puih, air kopi, air susu, air kopi susu dan teh. Berapa banyak susunan menu makanan pagi yang bisa dihidangkan?

   Penyelesaian:

   Dalam hal ini, prosesnya berupa menu makan pagi.

   - Tahap pertama berupa Nasi yang terdiri dari nasi putih, nasi kuning dan nasi goreng, sehingga $n_1 = 3$.
   - Tahap kedua berupa Telur yang terdiri dari telur dadar, telur ceplok, telur asin dan telur rebus, sehingga $n_2 = 4$.
   - Tahap ketiga berupa Kerupuk terdiri dari kerupuk udang, kerupuk ikan, kerupuk melinjo, sehingga $n_4 = 3$.
   - Tahap keempat berupa air putih, air kopi, air susu, air kopi susu dan teh, sehingga $n_5 = 5$. Jadi

banyaknya susunan menu makan pagi yang bisa dihidangkan ada $(3 \times 4 \times 3 \times 5)$ cara = 180 cara.

4) Dari angka 1, 2, 4, 5, dan 9 akan dibentuk suatu bilangan yang terdiri dari 4 digit. Ada berapa bilangan yang dapat dibentuk bila:
   a. Angka-angka tersebut tidak boleh berulang?
   b. Angka-angka tersebut boleh digunakan berulang?

   Penyelesaian:
   a. Maksud dari "angka-angka tersebut tidak boleh berulang" adalah bahwa bilangan yang dibentuk tersebut tidak memiliki 2 digit atau lebih yang angkanya sama (contoh: 1224, 1222, 1255, dan 9999 tidak diperbolehkan).
   Maka:

Ribuan	Ratusan	Puluhan	Satuan
5	4	3	2

   Digit ribuan memiliki 5 pilihan, yaitu 1, 2, 4, 5 dan 9. Digit ratusan hanya memiliki $5 - 1 = 4$ pilihan.
   Digit puluhan hanya memiliki $5 - 1 - 1 = 3$ pilihan.
   Digit satuan hanya memiliki $5 - 1 - 1 - 1 = 2$ pilihan.
   Jadi, banyaknya bilangan yang dapat dibentuk adalah $5\ x\ 4\ x\ 3\ x\ 2 = 120$ bilangan.

b. Karena angka-angkanya boleh digunakan berulang, maka:

Ribuan	Ratusan	Puluhan	Satuan
5	5	5	5

Pemilihan angka untuk digit ribuan tidak mempengaruhi jumlah cara pengisian untuk digit ratusan, puluhan, maupun satuan karena angka yang telah dipakai masih boleh digunakan. Demikian pula pemilihan angka untuk digit ratusan tidak mempengaruhi jumlah cara pengisian digit puluhan dan satuan. Dan pemilihan angka untuk digit puluhan tidak mempengaruhi jumlah cara pengisian digit satuan. Digit ribuan, ratusan, puluhan maupun satuan masing-masing akan memiliki 5 angka yang dapat dipilih.

Jadi, banyaknya bilangan yang dapat dibentuk adalah $5 \, x \, 5 \, x \, 5 \, x \, 5 \; = \; 625$ bilangan.

E. Pengisian Tempat yang Berbeda

Apabila suatu peristiwa pertama dapat dikerjakan dengan k_1 cara yang berbeda, peristiwa kedua dapat dikerjakan dengan k_2 yang berbeda dan seterusnya sampai peristiwa ke-n, maka banyaknya cara yang berbeda dari semua peristiwa tersebut adalah K, dimana: $K = k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_n$. K disebut dengan istilah banyaknya tempat yang tersedia dengan aturan perkalian atau kaidah perkalian. Untuk menentukan banyaknya tempat yang tersedia selain menggunakan aturan perkalian, juga menggunakan diagram pohon, dan pasangan berurutan.

F. Notasi Faktorial

Suatu perkalian bilangan asli berturut-turut dari 1 sampai n atau dari n sampai 1 disebt n faktorial yang dinotasikan dengan $n!$, yaitu:

e$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-2)(n-1)n$

Berdasarkan definisi tersebut, maka:

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(1) = n(n-1)!$ dan $1! = 1\ (0)! = 1$. Akibatnya harus didefinisikan bahwa $0! = 1$.

G. Permutasi

Dari 5 orang yang bersedia menjadi pengurus suatu organisasi kampus, yaitu Ali, Budi, Cici, Dini, dan Hendro, hanya akan dipilih 2 orang yang akan menempati posisi (jabatan) sebagai ketua dan wakil ketua. Banyaknya semua cara yang mungkin dalam menyusun permutasi tersebut dapat ditentukan dengan penggunaan kaidah perkalian berikut.

Jabatan	Ketua	Wakil Ketua
Banyak Cara	5	4

Jadi, banyaknya cara dimaksud adalah 5 x 4 = 20 cara.

Secara sistematis kita dapat mengubah (memanipulasi) cara perhitungan di atas sebagai berikut.

$$5 \times 4 = \frac{5 \times 4 \times (3 \times 2 \times 1)}{(3 \times 2 \times 1)} = \frac{5!}{3!} = \frac{5!}{(5-2)!}$$

Hasil terakhir ini selanjutnya dinotasikan sebagai berikut.

$$P(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!}$$

Perhatikan bahwa ketika kita menentukan susunan pengurus organisasi tersebut yang terdiri atas ketua dan wakil ketua dari 5 mahasiswa yang bersedia menjadi pengurus organisasi tersebut. Dalam hal ini, secara sistematis kita telah menyusun permutasi 2 objek dari 5 objek yang diketahui dan dinotasikan dengan $P(5,2)$.

Secara umum, permutasi r objek (dengan $r \leq n$) adalah semua urutan berbeda yang mungkin dari r objek yang diambil dari n objek. Dengan kaidah perkalian dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa banyaknya susunan permutasi sejumlah r objek yang berasal dari sejumlah n objek (dengan $r \leq n$) adalah sebagai berikut.

Tabel 3.3

Banyak Susunan Permutasi r Objek dari n Objek

Tempat ke-	1	2	3	...	k
Banyak Cara	N	$n-1$	$n-2$	...	$n-r+1$

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Sebagai ilustrasi, jika $S = \{a, b, c\}$, maka ab, ac, ba, ca, bc, dan cb adalah 6 buah permutasi-2 dalam S. dapat dipahami jika $r > n$, maka $P(n,r) = 0$. Jika $r = n$, maka perutasi–n dari himpunan S yang terdiri atas n unsur disebut permutasi himpunan S atau permutasi n unsur. Dengan demikian, permutasi n objek adalah semua susunan berbeda yang terdiri atas n objek dengan memperhatikan urutan.

Dapat dipahami bahwa banyaknya permutasi n objek, yang dinotasikan dengan P_n, adalah $n!$. jadi, $P_n = n!$. sebagai ilustrasi, permutasi dari himpunan $S = \{a, b, c\}$ adalah abc, acb, bac, bca, cab, dan cba. Jadi, $P(3,3) = 3! = 6$.

1. Permutasi dengan Beberapa Objek yang Sama

Perhatikan kata "AMAN" yang memiliki dua huruf A yang sama. Berapakah banyaknya semua susunan permutasi tersebut? Andaikan dua huruf yang sama (yaitu A) itu kita anggap berbeda, misalnya dinotasikan dengan A_1 dan A_2, maka beberapa contoh susunan permutasi tersebut adalah sebagai berikut.

$A_1A_2M\,N$

$A_2A_1M\,N$

Namun sesungguhnya dua permutasi itu merupakan permutasi yang sama yaitu AAMN (karena memang A_1 dan A_2 tersebut sama). Dengan demikian, tentu banyaknya samua permutasi MA_1A_2N dan

MA_2A_1N juga merupakan dua susunan permutasi yang sama, dan sebagainya. Dari uraian tersebut dapat dideskripsikan sebagai berikut.

Misalkan dari 4 objek yang sama dan lainya berbeda, maka banyaknya permutasi dari 4 objek tersebut adalah $4!$. Padahal banyaknya permutasi dari 2 objek yang sama tersebut adalah $2!$. Akibatnya banyaknya permutasi tersebut adalah $\frac{4!}{2!}$. Secara umum dapat dirumuskan sebagai berikut.

Misakan dari sejumlah n objek terdapat sebanyak:

n_1 objek jenis pertama

n_2 objek jenis kedua

n_3 objek jenis ketiga,

...

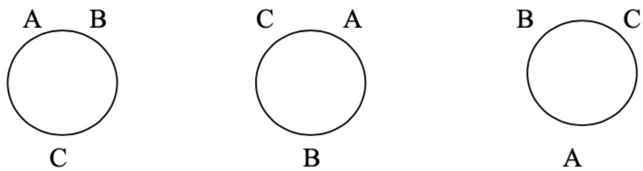
n_k objek jenis ke-k

Banyaknya permutasi yang berberbeda dari n objek tersebut adalah:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$$

2. Permutasi Siklis

Permutasi yang atas biasanya disebut dengan permutasi linier, objek-objek yang dipermutasikan diatur pada sebuah garis lurus. Jika objek-objek tersebut disusun melingkar, maka permutasi ini disebut permutasi siklis.



Gambar 3.1 Susunan Objek-Objek Melingkar

Dari gambar di atas, dalam permutasi siklis, ketiga susunan seperti berikut dianggap sama. Mengapa? Perhatikan bahwa dengan urutan searah dengan jarum jam, urutan ABC sama dengan BCA dan CAB. Dalam permutasi siklis, yang diperhatikan adalah posisi objek-objek terhadap objek-objek yang lainnya dan BUKAN posisi objek-objek terhadap lingkungannya. Jadi, berapakah banyaknya permutasi siklis dari 3 objek?

Perhatikan bahwa banyaknya susunan permutasi dari 3 objek yang berbeda adalah $3!$. Terdapat 3 macam susunan permutasi siklis yang sama. Dengan demikian banyaknya susunan permutasi siklis dari 3 objek yang berlainan adalah:

$$\frac{3!}{3} = \frac{3 \times 2 \times 1}{3} = 2! = (3 - 1)!$$

Banyaknya susunan permutasi dari n objek yang berbeda adalah $n!$. Terdapat n macam susunan permutasi siklis yang sama. Dengan demikian, banyaknya susunan permutasi siklis dari n objek yang berlainan adalah:

$$\frac{n!}{n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - 1) \times n}{n} = (n - 1)!$$

Jadi, banyaknya permutasi siklis dari n objek yang berlainan adalah $(n-1)!$.

3. Permutasi Berulang

Jika tersedia n unsur yang berbeda, maka banyaknya permutasi berulang r unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia adalah:

$$P_r = n^r$$

Contoh:

1) Berapakah banyaknya bilangan yang terdiri dari 2 angka yang disusun dari angka 2, 3 dan 5 jika angka-angka yang tersedia boleh ditulis ulang.

   Penyelesaian:

   Banyaknya unsur $n = 3$ dan $r = 2$, maka $P_r = n^r = 3^2 = 9$.

2) Berapa banyak cara menyusun 4 buku dari 6 buku yang berbeda ke dalam sebuah rak?

   Penyelesaian:

   Dari 6 buku akan dipilih 4 buku dengan memperhatikan urutannya sehingga membentuk susunan yang berbeda-beda. Berarti $n = 6$ dan $r = 4$.

   Banyak cara menyusun 4 buku dari 6 buku adalah permutasi 4 dari 6 atau ${}_6P_4$.

$${}_6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 360$$

   Jadi, banyak cara menyusun 4 buku dari 6 buku yang berbeda adalah 360 cara.

3) Berapa banyak susunan huruf berbeda yang dapat dibentuk dari huruf S, E, M, E, S, T, E, R?

Penyelesaian:

Pada kata "SEMESTER" terdapat huruf-huruf yang sama. Oleh karena itu, digunakan permutasi unsur yang sama.

$n = 8$

$n^1 =$ banyak huruf "S" = 2

$n_2 =$ banyak huruf "E" = 3

$n_3 =$ banyak huruf "M" = 1

$n^4 =$ banyak huruf "T" = 1

$n^5 =$ banyak huruf "R" = 1

$$P = \frac{n!}{n^1!\,n^2!\,n^3!\,n^4!\,n^5!} = \frac{8!}{2!\,3!\,1!\,1!\,1!} = \frac{40320}{12}$$
$$= 3360$$

Jadi, banyak susunan huruf yang berbeda yang dapat dibentuk adalah 3.360 susunan.

3) Dalam sebuah keluarga yang terdiri dari seorang ayah, seorang ibu, dan 3 orang anaknya makan bersama dan mengelilingi sebuah meja makan. Berapa banyaknya cara yang berlainan saat mereka dapat duduk, jika:
   a. Mereka berpindah-pindah tempat
   b. Ayah dan ibu selau berdekatan

   Penyelesaian:

   a. Banyak anggota keluarga adalah 5 orang (seorang ayah, ibu, dan 3 orang anak). Sehingga, banyaknya cara yang berlainan saat mereka duduk berpindah-pindah tempat adalah $(5-1)! = 4! = 24$ cara.

b. Ayah dan ibu saling berdampingan, sehingga pasangan ini dapat kita anggap satu. Sehingga terdapat 4 objek yang akan disusun secara siklis. Akan tetapi pasangan ayah dan ibu dapat disusun kembali menjadi ${}_2P_2$ cara. Sehingga banyaknya susunan agar ayah dan ibu selalu berdekatan adalah $(4-1)! \times {}_2P_2 = 3! \times 2! = 12$ cara.

H. Kombinasi

Suatu susunan dari sekelompok objek tanpa memperhatikan semuanya atau urutannya disebut dengan kombinasi. Kombinasi dapat disebut dengan pengelompokkan sejumlah unsur. Banyak kombinasi r (objek) yang diambil dari n (objek) yang tersedia dimana $r \leq n$, dinotasikan sebagai $C_{n,r}$ atau ${}_nC_r$ dan ini adalah cara memilih r elemen dari n elemen yang diketahui.

$$C_r^n \text{ atau } \binom{n}{r}, r \leq n$$

Misalnya, jika dalam suatu organisasi terdapat 5 mahasiswa yang bernama Isti, Ina, Putri, Dini, Dina dan anda diminta untuk memilih 3 mahasiswa di antara 5 mahasiswa tadi sebagai perwakilan mengikuti olimpiade, siapa saja yang akan anda pilih? Ketika anda memilih 3 mahasiswa, berarti anda akan membuat kombinasi.

Dalam masalah ini, urutan/komposisi tidak dipertimbangkan karena tidak ada bedanya jika dibolak-balik susunanannya. Dengan mendata semua kemungkinan 3 orang yang akan dipilih dari 5 orang yang ada, maka diperoleh:

{Isti, Ina, Putri}	{Isti, Ina, Dini}
{Isti, Ina, Dina}	{Isti, Putri, Dini}
{Isti, Putri, Dina}	{Isti, Dini, Dina}
{Ina, Putri, Dini}	{Ina, Putri, Dina}
{Ina, Dini, Dina}	{Putri, Dini, Dina}

Sehingga, terdapat 10 cara untuk memilih 3 orang dari 5 orang yang ada. Jadi, banyaknya kombinasi mahasiswa yang bisa dipilih dapat dicari dengan rumus:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Contoh:

Untuk pengibaran bendera diperlukan 3 orang murid, dari 5 calon yang sudah terlatih, yaitu R, S, T, U dan V. Berapa macam susunan yang dapat dipilih pengibar bendera dari ke-5 calon itu?

Penyelesaian:

Dari persoalan itu dapat dibentuk susunan: RST, RSU, RSV, RTU, RTV, RUV, STU, STV, SUV, dan TUV. Urutan pada susunan seperti ini tidak penting (tidak diperhatikan), artinya pada susunan RST bisa juga disebut RTS, STR, dan sebagainya. yang meembedakan suatu susunan yang satu dengan yang lainnya adalah perbedaan unsur/objek. Susunan di atas disebut sebagai kombinasi dari R, S, T, U dan V, yang setiap kali diambil 3 unsur (objek) ditulis dengan C_3^5.

Banyaknya kombinasi r objek dari n objek ditulis dengan Cn susunan yang berbeda. Setiap kombinasi dari r objek dapat kita disusun sebanyak $r!$ cara, maka diperoleh $r!$ Permutasi. Maka dari itu C_r^n kombinasi akan menghasilkan $C_r^n \times r!$.

Banyaknya jumlah $C_r^n \times r!$ merupakan jumlah seluruh permutasi dari n objek diambil r objek setiap kali, karena dari setiap kombinasi r objek sebenarnya muncul dari beberapa kombinasi yang terdiri dari r objek, maka dari itu, $C_r^n \times r! = \frac{n!}{(n-r)!}$, setelah dibagi $r!$ kita peroleh rumus:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Misalnya, $C_3^{50} = \frac{50!}{r!(n-r)!} = \frac{50.49.48}{3} = 117600$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Kesimpulan: Kombinasi dari n objek diambil $(n - r)$ objek setiap kali sama dengan kombinasi dari n objek diambil r objek setiap kali yaitu:

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{n}$$

Contoh:

Berapa cara yang dapat dilakukan untuk memilih 13 kartu dari set kartu bridge (52 kartu), kalau urutan tak diperhatikan.

Penyelesaian:

$n = 52, \qquad r = 13$

$$C_{13}^{52} = \frac{52!}{13!\,(52-13)!} = \frac{52!}{13!\,39!} = 635.013.559.600$$

Selanjutnya, permutasi yang terdiri dari r objek yang dipilih dari n objek. Dari n objek dengan pengambilan r objek akan diperoleh P_r^n permutasi. Sehingga diperoleh hubungan:

$$\boxed{\begin{aligned} C_r^n.r! &= P_r^n \\ C_r^n.r! &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ C_r^n.r! &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \end{aligned}}$$

Contoh:

1. Misalkan ada 2 buah bola yang berwarna sama dan 3 buah kotak. Bola akan dimasukan ke dalam kotak sehingga setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola. Berapa jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak tersebut?

   Penyelesaian:

   Misalkan ketiga kotak tersebut ditaruh memanjang, maka ada 3 cara memasukan dua bola tersebut ke dalam kotak, yaitu:

(i) Kedua bola masing-masing ditaruh pada dua kotak pertama (kotak I dan kotak II)

(ii) Kedua bola masing-masing ditaruh pada dua kotak yang paling ujung (kotak I dan kotak III)

(iii) Kedua bola masing-masing ditaruh pada dua kotak terakhir (kotak II dan Kotak III)

Secara umum, jumlah cara memasukkan r buah bola yang berwarna sama ke dalam n buah kotak adalah:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\left(n-(r-1)\right)}{r!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

2. Diketahui terdapat n buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama) akan dimasukan ke dalam n buah kotak. Misalnya komposisi bola tersebut adalah:

   n_1 bola di antaranya berwarna 1,

   n_2 bola di antaranya berwarna 2,

   $\vdots$

   n_k bola di antaranya berwarna k,

   jadi $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. Berapa jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak maksimum satu buah bola)?

   Penyelesaian:

   Jika n buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam n buah kotak adalah $P(n,n) = n!$. Dari pengaturan n buah bola itu, ada $n_1!$ cara memasukkan bola berwarna 1

ada $n_2!$ cara memasukkan bola berwarna 2

⋮

ada $n_k!$ cara memasukkan bola berwarna k

Permutasi n buah bola yang mana n_1 di antaranya berwarna 1, n_2 bola berwarna 2, ..., n_k bola berwarna k adalah:

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Cara lain:

Ada $C(n, n_1)$ cara untuk menempatkan n_1 buah bola yang berwarna 1.

Ada $C(n - n_1, n_2)$ cara untuk menempatkan n_2 buah bola berwarna 2.

Ada $C(n - n_1 - n_3, n_3)$ cara untuk menempatkan n_3 buah bola berwarna 3.

⋮

Ada $C(n - n_1 - n_2 - \cdots -, n_{k-1}, n_k)$ cara untuk menempatkan n_k buah bola berwarna k.

Jumlah cara pengaturan seluruh bola ke dalam kotak adalah:

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n, n_1)C(n - n_1, n_2)C(n - n_1 - n_2, n_3) \dots C(n - n_1 - n_2 - \cdots -, n_{k-1}, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_2!(n-n_1-n_2-n_k)!} \cdots \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_2!(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}-n_k)}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$$

Kesimpulan:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Kombinasi memiliki beberapa macam bagian di antaranya adalah:

1. Kombinasi Pengulangan

Jika pada urutannya tidak diperhatikan dan sebuah objek dapat dipilih lebih dari satu kali, maka jumlah dari kombinasi yang ada yaitu:

$$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{n+r-1}{n-1}$$

Yang mana (n) yaitu jumlah dari sebuah objek yang dapat dipilih dan (r) merupakan jumlah yang harus dipilih.

Contoh:

Misalnya jika kamu sedang pergi ke suatu tempat seperti toko donat. Pada Toko itu menyediakan berupa 10 jenis donat yang berbeda. Jika Kamu ingin membeli tiga buah donat yang ada pada took itu. Maka kombinasi yang akan dihasilkan yaitu:

$\frac{(10+3-1)!}{3!(10-1)!} = 220$ kombinasi.

2. Kombinasi Tanpa Pengulangan

Ketika pada suatu urutannya tidak diperhatikan akan tetapi pada setiap objek yang ada hanya bisa dipilih satu kali maka jumlah dari kombinasi yang ada yaitu:

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Yang mana (n) yaitu suatu jumlah dari objek yang bisa dipilih sedangkan (r) yaitu jumlah yang harus kita pilih.

Contoh

misalkan, Andi memiliki 5 buah pensil warna dengan warna yang berbeda seperti; merah, kuning, hijau, biru dan ungu. Dan Andi ingin membawanya ke sekolah. Tetapi Andi hanya boleh membawa dua buah pensil warna saja. Lalu, ada berapa banyak carakah untuk mengkombinasikan setiap pensil warna yang ada? Yaitu dengan menggunakan sebuah rumus di atas maka $\frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ buah kombinasi.

I. Perbedaan Permutasi dan Kombinasi

1. Permutasi membentuk banyak cara untuk mengatur satu set objek secara berurutan. Sedangkan kombinasi bisa dilakukan dengan banyak cara sehingga urutannya tidak relevan.
2. Urutan, posisi dan penempatan menjadi masalah pada permutasi sedangkan kombinasi tidak menjadi salah terhadap urutan, posisi dan penempatan.
3. Perbedaan urutan terhadap permutasi menjadikan adanya perbedaan makna, sedangkan perbedaan urutan terhadap kombinasi tidak menjadikan adanya perbedaan makna.

Contoh:

1. $\{a, b, c\}$ pengambilan 2 unsur dari 3 unsur jika menggunakan permutasi maka akan diperoleh hasil ab, ba, ac, ca, bc, cb. Tetapi jika menggunakan kombinasi hasil yang diperoleh adalah ab, ca, bc.
2. Sebuah nomor motor di jakarta dan sekitarnya yaitu AB, dan apabila kita balik maka akan menjadi BA (banten), maka dari hal tersebut akan terlihat perbedaan maknanya.
3. $M \leftrightarrow N$

   $N \leftrightarrow M$

   Dua titik M dan N di atas dihubungkan oleh satu garis. Maka garis MN = NM, maka dari hal itu berarti tidak menyebabkan perbedaan makna.
4. Saat akan mengikuti lomba sepak bola, pelatih akan memilih pemain yaitu sebanyak 11 orang, yang dipilih dari 20 orang yang mendaftar (tidak memperhatikan posisi pemain).

   Penyelesaian:

   $$C_{11}^{20} = \frac{20!}{11!(20-11)!} = \frac{20!}{11!9!} = 167.960$$
5. Dalam sebuah event ada 120 orang dan masing-masing akan saling berjabatan tangan. Berapakah jumlah jabatan tangan yang akan terjadi?

   Penyelesaian:

   Untuk menjawab soal permutasi dan kombinasi tersebut mudah, kita pakai logika saja. Jika semua saling bersamalan satu sama lain maka 1 orang akan bersalaman dengan 119 orang. Jika ada 120 orang maka 119 × 120. Akan tetapi jika O jabat tangan dengan P akan sama dengan P jabatan dengan O maka dari hal tersebut harus dibagi 2. Maka jumlah jabat tangan yang akan terjadi $=\frac{119\times 120}{2}=7140$ jabat tangan.

J. Rangkuman

1. Perluang adalah suatu cara untuk mengungkap pengetahuan atau kepercayaan bahwa suatu kejadian akan berlaku atau telah terjadi. Peluang juga dikenal sebagai kebolehjadian atau probabilitas.
2. Misalkan K suatu kejadian dalam suatu percobaan. Frekuensi relative kejadian K $\left(f_r(K)\right)$ adalah hasil bagi banyaknya hasil dalam K dengan banyaknya percobaan.
3. Ruang sampel adalah suatu himpunan yang anggotanya adalah titik-titik sampel.
4. Peluang suatu kejadian K adalah hasil bagi banyaknya kemungkinan kejadian K terjadi dengan banyaknya ruang contoh dari suatu percobaan, dirumuskan: $P(K)=\frac{n(K)}{n(S)}$, dimana $n(K)$ adalah banyaknya kejadian K yan terjadi dan $n(S)$ adalah banyak anggota ruang contoh suatu percobaan.

K. Evaluasi

Kerjakan latihan soal berikut ini dengan benar!

1. Sekelompok mahasiswa terdiri atas 4 orang pria dan 3 orang wanita. Berapakah jumlah cara memilih satu orang wakil pria dan satu orang wakil wanita?
2. Sekelompok mahasiswa terdiri atas 4 orang pria dan 3 orang wanita. Berapa jumlah cara memilih satu orang yang mewakili kelompok tersebut?
3. Misalkan himpuan A= {a, b, c, d} dan himpuan B {1,2,3}. Berapa banyak pasangan terurut yang dapat dibentuk antara anggota himpunan A dengan anggota himpunan B?
4. Riri memiliki sepatu warna pink, putih, biru, dan hitam. Sepatu itu akan dipasangkan dengan dua stel rok berwarna putih dan hitam. Tak lupa ia juga memiliki baju berwarna pink, hitam dan biru. Berapa banyak kombinasi pakaian yang dapat dipakai Riri.
5. Seorang satpam bank ingin mencetak nomor antrian nasabah yang terdiri dari tiga angka. Jika nomor antrian tersebut tidak memuat angka yang sama yang dibentuk dari angka 0,1,2,3. Banyak pilihan nomor antrian yang dapat dibuat adalah…
6. Setiap tahun, SMA Pelita Bangsa selalu mengadakan pentas seni. Sebelum acara akbar, para siswa mengadakan pemilihan ketua, sekretaris, dan bendahara. Setelah melakukan seleksi, ada 7 siswa yang mendaftarkan diri. Banyak cara untuk memilih

ketua, sekretaris, bendahara untuk acara tersebut adalah…

7. Terdapat 3 pria dan 3 wanita akan duduk melingkar. Ada berapa cara mereka duduk, bila:
   a. Susunan duduk bebas?
   b. Ketiga pria harus berdampingan?
8. Diketahui himpunan A = {1, 2, 3, 4, 5}. Banyak himpunan bagian A yang banyak anggotanya 3 adalah…
9. Nilai kombinasi C_3^8 sama dengan …
10. Suatu kelompok yang terdiri dari 3 orang pria dan 2 orang wanita akan memilih 3 orang pengurus. Berapa cara yang dapat dibentuk dari pemilihan jika pengurus terdiri dari 2 orang pria dan 1 orang wanita...
11. Dalam sebuah ujian, seorang mahasiswa diwajibkan mengerjakan 5 soal dari 8 soal yg tersedia. Tentukan:
    a. Banyaknya jenis pilihan soal yg mungkin untuk dikerjakan.
    b. Banyaknya jenis pilihan soal yg mungkin dikerjakan jika no.6 dan 7 wajib dikerjakan.
12. Pada pelaksanaan ujian praktek olah raga di sekolah A, setiap peserta diberi nomor yang terdiri dari tiga angka dengan angka pertama tidak nol. Banyaknya peserta ujian yang bernomor ganjil adalah…
13. Ada 5 orang anak akan foto bersama tiga–tiga di tempat penobatan juara I, II, dan III. Jika salah seorang diantaranya harus selalu ada dan selalu

menempati tempat juara I, maka banyak foto berbeda yang mungkin tercetak adalah ...

14. Pada suatu took buah yang menjual jeruk, mangga, dan pisang. Wawa ingin membeli 2020 buah pada took tersebut. Jika Wawa ingin membeli paling sedikit masing-masing 55 buah, maka banyak komposisi buah yang mungkin dapat dibeli adalah…
15. Pada pelemparan sebuah dadu, peluang muncul angka 11 adalah 1/31/3 dari angka yang lain. Peluang muncul angka prima pada pelemparan dadu itu adalah…
16. Di sebuah took terdapat 5 buku matematika, 4 buku fisika, dan 3 buku kimia yang dapat digunakan oleh siswa untuk belajar. Akan tetapi, siswa tersebut hanya boleh membeli 5 buku. Bila ia memilih 2 buku matematika, 2 buku fisika, dan 1 buku kimia, berapa cara siswa tersebut memilih 5 buku yang dibeli?
17. Kata INDONESIA disusun dari huruf I, N, D, O, N, E, S, I, dan A. Biladisusun secara alfabetis (sesuai abjad), maka kata INDONESIA berada pada urutan ke…
18. Sebuah dadu bermata enam yang dibuat tidak seimbang dirancang sedemikian rupa sehingga peluang muncul mata dadu genap sama dengan dua kali peluang muncul mata dadu ganjil. Peluang muncul mata dadu 44 dari hasil pelemparan dadu tersebut sekali adalah…
19. Lala menulis sebuah bilangan 6 digit, 2 buah angka 9 yang ada pd bilangan tsb dihapus sehingga yg

terbaca adl 2012. Berapa banyak bilangan dg 6 digit yang dapat Lala tulis agar hal tsb dapat terjadi?

20. Berapa banyak bilangan empat digit yang jumlahan digitnya genap dan dibentuk dari 0, 1, 2, 3?
21. Dalam kantong I terdapat 5 kelereng merah dan 3 kelereng putih, dalam kantong II terdapat 4 kelereng merah dan 6 kelereng hitam. Dari setiap kantong diambil satu kelereng secara acak. Peluang terambilnya kelereng putih dari kantong I dan kelereng hitam dari kantong II adalah….
22. Dengan berapa banyak cara huruf dari kata 'OPTICAL' dapat diatur sehingga vokal selalu bersatu?
23. 25 bus berjalan antara dua tempat P dan Q. Dalam berapa banyak cara seseorang dapat pergi dari P ke Q dan kembali dengan bus yang berbeda?
24. Berapa 8 digit nomor ponsel yang dapat dibentuk jika minimal salah satu digitnya berulang dan 0 tidak dapat digunakan untuk memulai nomor ponsel?
25. Dari 8 kelompok perempuan dan 6 laki-laki, akan dibentuk sebuah komite yang terdiri dari 3 laki-laki dan 3 perempuan. Berapa banyak cara panitia dibentuk jika dua perempuan menolak untuk melayani bersama?

*****

BAB 4
BARISAN DERET

A. Tujuan Pembelajaran

Adapun tujuan pembelajaran pada bab barisan dan deret antara lain:

- Mahasiswa mampu menjelaskan perbedaan barisan dan deret
- Mahasiswa mampu menentukan suku ke-n dan jumlah suku ke-n pada barisan dan deret aritmatika
- Mahasiswa mampu menentukan suku ke-n dan jumlah suku ke-n pada barisan dan deret geometri
- Mahasiswa dapat menentukan koefisien binomial
- Mahasiswa dapat menentukan suku ke-n pada ekspansi binomial

B. Barisan

Pernahkah kalian antri dan berbaris membeli bahan bakar bermotor di sebuah SPBU?, jika kendaraan bermotor yang sedang berbaris adalah sebuah bilangan, kendaraan bermotor yang akan diisi oleh petugas merupakan kendaraan bermotor nomor 1, kendaraan bermotor dibelakangnya adalah nomor 2 dst maka urutan nomor tersebut dapat disusun menjadi sebuah barisan bilangan sebagai berikut: 1, 2, 3, 4, 5… dst. Sekarang perhatikan barisan bilangan berikut ini:

a. 2, 4, 6, 8,…
b. 1, 4, 9, 16,…

c. 1, 3, 6, 10,...

Dari barisan bilangan a, b, dan c disebut sebagai barisan bilangan apa?

a. Merupakan barisan bilangan…
b. Merupakan barisan bilangan…
c. Merupakan barisan bilangan…

Dari uraian diatas dapat disimpulkan definisi barisan sebagai berikut:

Definisi barisan: Barisan adalah himpunan bilangan dengan urutan tertentu

Istilah dalam barisan sering dilambangkan oleh huruf kecil seperti u_1 yang menunjukkan suku pertama dan u_2 menunjukkan suku kedua, dan barisan dapat ditulis:

$u_1, u_2, u_3, \ldots$

Untuk barisan bilangan genap $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 6$ dst. Barisan dapat digambarkan dengan beberapa cara yang berbeda. Salah satu cara untuk menggambarkannya adalah dengan suku ke-n. Suku ke-n dalam barisan bilangan genap adalah 2n. ini dapat ditulis sebagai berikut:

$u_n = 2n$

Periksa $u_n = n^2$ dan $u_n = \frac{1}{2} n (n + 1)$ masing-masing menghasilkan barisan bilangan kuadrat dan barisan bilangan segitiga.

C. Deret

Setelah kalian mengetahui definisi barisan, selanjutnya jika semua suku barisan dijumlahkan maka akan terbentuk sebuah **deret.**

$1 + 2 + 3 + 4 + 5$ adalah deret *finite* atau deret terbatas

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 \ldots$ adalah deret *infinite* atau deret tak terbatas

Jika sebuah barisan memiliki lima suku $u_1, u_2\ u_3, u_4,$ dan u_5, maka deret berdasarkan barisan ini adalah:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$

Deret ini dapat ditulis dalam bentuk yang lebih ringkas dengan notasi sigma.

$$u1 + u2 + u3 + u4 + u5 = \sum_{i=1}^{5} Ui$$

D. Barisan dan deret Aritmatika

1. Barisan Aritmatika

Barisan aritmatika adalah barisan yang di mana setiap suku yang dihasilkan adalah dengan menambahkan atau mengurangkan suku dengan bilangan tetap. Contohnya 2, 5, 8, 11, ... dan 14, 10, 6, 2, ..., juga termasuk barisan aritmatika. Perhatikan bahwa angka yang ditambahkan pada setiap suku pada barisan dapat bernilai positif dan negatif. Angka tersebut disebut **beda**.

Suku pertama biasanya dilambangkan dengan huruf **a** dan beda dilambangkan dengan huruf **b**. sebagai contoh 2, 5, 8, 11, ... suku pertama atau a = 2, beda atau b = 3. Barisan ini dapat ditulis kembali

2, $2+3$, $2+(2x3)$, $2+(3x3)$, $2+(4x3)$,...

Rumus suku ke-n dari berisan tersebut dapat ditulis $2+(n-1)\ x\ 3$. Secara umum, rumus suku ke-n pada barisan aritmatika adalah:

$$\boxed{\boldsymbol{Un = a + (n-1)b}}$$

2. Deret Aritmattka

Ketika Carl Friederich Gauss $(1777-1855)$ di sekolah, dia selalu mejawab pertanyaan matematika dengan cepat. Suatu hari gurunya meminta seluruh siswa untuk diam selama setengah jam untuk menjumlahkan angka $1-100$. Belum lama setelah itu Gauss yang berusia sepuluh tahun itu telah selesai menghitung dan jawabannya adalah 5.050.

Gauss tidak menambahkan angka tersebut satu persatu akan tetapi dia menulis dua deret, deret yang pertama ditulis $1-100$ dan deret kedua ditulis $100-1$ dan menjumlahkan keduanya.

Deret ke-1 = $1+2+3+4+5 \ldots +100$

Deret ke-2 = $100+99+98+97+96 \ldots +1$

Dua deret dijumlahkan = $101+101+101+\cdots+101+101$

dimana terdapat 100 suku dalam deret tersebut:

2 Deret = 101×100

2 Deret = 10.100

1 Deret = 10.100 : 2

1 Deret = 5.050

Bilangan $1-100$ dengan mengunakan metode Gauss dapat menentukkan penjumlahan pada barisan aritmatika. Biasanya penjumlahan tersebut dilambangkan dengan huruf S atau S_n dimana n adalah jumlah suku pertama yang dijumlahkan. Jadi, secara umum rumus jumlah deret aretmatika adalah:

$$S_n = \frac{1}{2}n\ [2a + (n-1)b]$$

Hasil ini dapat ditulis juga

$$S_n = \frac{1}{2}n(a+1)$$

E. Barisan dan Deret Geometri

1. Barisan Geometri

Barisan geometri adalah barisan yang di mana setiap suku yang dihasilkan adalah dengan mengalikan suku dengan bilangan tetap, bilangan tetap tersebut disebut dengan rasio. Secara induktif dapat ditulis sebagai berikut:

$u_{n+1} = ru_n$ dengan suku pertama u_1.

Notasi yang digunakan dalam barisan geometri adalah:

- Suku pertama $u_1 = a$
- Rasio = r
- Jumlah suku = n

- u_n merupakan suku ke-n.

Misalkan terdapat suatu barisan geometri 5, 10, 20, 40. Maka didapatkan $a = 5, r = 2$, dan $n = 4$. Sehigga suku-sukunya dapat ditulis sebagai berikut :

$u_1 = a = 5$

$u_2 = a \times r = 5 \times 2 = 10$

$u_3 = a \times r^2 = 5 \times 2^2 = 5 \times 4 = 20$

$u_4 = a \times r^3 = 5 \times 2^3 = 5 \times 8 = 40$

Kalian akan melihat bahwa dalam setiap kasus, pangkat r lebih kecil satu dari sukunya, seperti suku ke-4 dapat ditulis $u_4 = a \times r^3$ dimana 3 lebih kecil dari 4. Ini dapat ditulis secara deduktif sebagai berikut:

$u_n = ar^{n-1}$

2. Deret Geometri

Deret geometri merupakan jumlah suku-suku pada barisan geometri. Untuk dapat menemukan rumus secara umum pada deret geometri dapat ditulis sebagai berikut:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

Mengalikan dengan rasio:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \qquad (2)$$

Menguragi 1 dari 2, menghasilkan:

$$\begin{array}{ll} S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} & (1) \\ \hline rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n & (2) \end{array}$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \text{ (Rumus ini biasa digunakan bila r } < 1)$$

Dapat juga menggunakan rumus

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \text{ (Rumus ini biasa digunakan bila r } > 1)$$

3. Deret Geometri Tak Terbatas

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ adalah deret geometri tak terbatas, dengan rasio $\frac{1}{2}$. Menjumlahkan suku satu per satu dapat ditulis $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, 1\frac{15}{16}, \ldots$

Perhatikan, semakin banyak suku yang kalian jumlahkan, semakin dekat jumlahnya dengan 2. Banyaknya suku yang tak terbatas akan tetapi jumlah suku-sukunya cenderung mendekati 2.

$$n \to \infty, Sn \to 2.$$

Maka deret tersebut disebut dengan deret geometri *konvergen* (terpusat ke satu titik). Pada deret geometri *konvergen* besarnya rasio berada diantara -1 dan 1 atau dapat ditulis $-1 \leq r \leq 1$. Sebaliknya jika besar rasio ≥ 1atau ≤ -1 maka jumlah deret geometri semakin besar dan tak terbatas, deret ini disebut dengan deret geometri *divergen* (menyebar). Sehingga rumus deret geometri *konvergen* dapat ditulis:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

F. Teorema Binomial

Apa arti dari binomial?. *Bi* berasal dari bahasa latin yang berarti dua sehingga binomial adalah suatu persamaan dengan dua suku. Beberapa contoh binomial adalah $(a+b)^2$, $(2+x)^4$, $(a+b)^{1/2}$. Binomial $(a+b)^2$ dijabarkan:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Begitu juga dengan $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Sekarang tulis kembali koefisien dari persamaan-persamaan tersebut

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & (1) & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Perhatikan bahwa posisi koefisien tersebut merupakan Segitiga Pascal. Pangkat yang dimiliki variabel a menurun dari 4 ke 0 sedangkan pangkat yang dimiliki variabel b meningkat dari 0 ke 4

Nilai koefisien binomial dapat ditemukan di buku tabel binomial. Ini membantu menemukan koefisien ketika pangkat menjadi besar, ketika pangkat menjadi besar menulis Segitiga Pascal menjadi semakin lama dan membosankan karena ditulis baris demi baris

Akan ada waktunya kalian menemukan koefisien binomial di luar dari jangkauan tabel binomial. Misalkan pada tabel hanya menyediakan koefisien binomial pada pangkat 20 saja, lalu bagaimana jika kalian ingin mencari koefisien dari x^{17} dalam penjabaran $(x + 2)^{25}$? Tentu kalian membutuhkan rumus untuk mencari koefisien binomial tersebut.

Pertama yang kalian butuhkan adalah notasi untuk mengidentifikasi koefisien binomial. Huruf n digunakan untuk menunjukkan besarnya pangkat, dan baris pada koefisien binomial digunakan huruf r, di mana r dapat mengambil nilai apa pun mulai dari 0 hingga n. Jadi untuk baris ke 5 pada Segitiga Pascal

$n = 5$: 1 5 10 10 5 1

$r = 0$ $r = 1$ $r = 2$ $r = 3$ $r =$
4 $r = 5$

Koefisien binomial dapat ditulis sebagai $\binom{n}{r}$ atau biasa ditulis ${}_{n}C_{r}$, atau kombinasi n dan r. Dengan demikian

$\binom{5}{0} = {}^{5}C_{0} = 1$

$\binom{5}{1} = {}^{5}C_{1} = 5$

$\binom{5}{2} = {}^{5}C_{2} = 10$

$\binom{5}{3} = {}^{5}C_{3} = 10$

$\binom{5}{4} = {}^{5}C_{4} = 5$

$\binom{5}{5} = {}^{5}C_{5} = 1$

Masih ingatkah kalian dengan rumus kombinasi, yaitu:

${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Teorema 1

Jika $r \leq n$ maka $\binom{n}{r} = \frac{n}{(n-r)}$.

Teorema ini disebut dengan teorema simetrik dari koefisien binomial. Sifat ini membatnu dalam menghitung suatu kombinasi.

Teorema 2

Jika k dan r adalah bilangan asli, degan $k > r$ maka $\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$.

Teorema 3

Misalkan *a* dan *b* adalah variabel dan n adalah bilangan bulat non negatif, maka $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$, untuk n $\in Z^+$ dimana $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Teorema 4

Jika n suatu bilangan asli maka $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{k} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n$

Teorema 5

Jika n, m, dan k adalah bilangan asli dengan $n > k > m$ maka:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

Teorema 6

Jika n dan k adalah bilangan asli dengan $n > k$, maka:

$$k\binom{n}{r} = n(\binom{n-1}{k-1})$$

G. Contoh-contoh Soal

1. Tentukan lima suku pertama dari barisan yang suku ke-n nya sebagai berikut:

   $u_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$

   Penyelesaian:

   Untuk menentukan lima suku pertama subtitusi n = 1, 2, 3, 4, dan 5 masing-masing ke dalam u_n.

   $u_1 = \frac{1(1-1)(1-2)}{3} = 0$

   $u_2 = \frac{2(2-1)(2-2)}{3} = 0$

   $u_3 = \frac{3(3-1)(3-2)}{3} = 2$

   $u_4 = \frac{4(4-1)(4-2)}{3} = 8$

   $u_5 = \frac{5(5-1)(5-2)}{3} = 20$

   Jadi 5 suku pertamanya adalah 0, 0, 2, 8, 20.

2. Barisan *Fibonaci* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... dapat didefinisikan dengan relasi pengulangan. Tentukan u_n dari barisan *Fibonaci*!

   Penyelesaian:

   Untuk menentukan u_n, perhatikan hubungan antara suku-sukunya.

   $u_1 = 1$

$u_2 = 1$

$u_3 = 2 = u_1 + u_2$

$u_4 = 3 = u_2 + u_3$

$u_5 = 5 = u_3 + u_4$

Jadi, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

3. Jika $u_i = 4i - 2$, tentukan $\sum_{i=1}^{5} Ui$!

   Penyelesaian:

   $\sum_{i=1}^{5} Ui = \sum_{i=1}^{5}(4i - 2)$

   $=(4 - 2) + (8 - 2) + (12 - 2) + (16 - 2) + (20 - 2)$

   $= 2 + 6 + 10 + 14 + 18$

   $= 50$

   Notasi sigma sangat berguna ketika deretnya *infinite* atau deretnya tak terbatas. Dalam kasus ini penjumlahan yang tidak ada akhirnya, sehingga menentukan akhir dari rangkaian penjumlahannya sangat tidak mungkin. Dengan notasi sigma dapat ditulis:

   $\sum_{i=1}^{\infty} Ui = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

   Sehingga deret bilangan genap dapat ditulis:

   $$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} 2i$$

4. Tentukan suku ke-20 dari barisan aritmatika 2, 4, 6…

   Penyelesaian:

   Dketahui a = 2 dan b = 2

   Gunakan rumus $Un = a + (n - 1)b$

   $U20 = 2 + (20 - 1)2$

$U20 = 2 + 19\,x\,2$

$U20 = 2 + 36$

$U20 = 38$

Jadi, suku ke-20 dari barisan aritmatika tersebut adalah 38.

5. Tentutkan jumlah semua suku dari deret aritmatika berikut: 100 + 96 + 92…

   Dimana n = 20

   Penyelesaian:

   Diketahui $a = 100, b = -4$, dan $n = 20$

   $S_n = \frac{1}{2} n\,[2a + (n-1)b]$

   $S_{20} = \frac{1}{2} 20\,[2\,x\,100 + (20-1) - 4]$

   $S_{20} = 10\,[200 + (19) - 4]$

   $S_{20} = 10\,[200 + (-76)]$

   $S_{20} = 10\,x\,124 = 1.240$

   Jadi, jumlah suku ke-20 pada deret tersebut adalah 1.240.

6. Tentukan suku kedelapan barisan geometri berikut 3, 6, 12, 24, ...

   Penyelesaian:

   Pada barisan tersebut didapatkan a = 3 dan r = 2

   Sehingga

   $u_n = ar^{n-1}$

   $u_8 = 3 \times 2^{8-1}$

   $u_8 = 3 \times 2^7$

   $u_8 = 3 \times 128$

$u_8 = 384.$

Jadi, suku ke-8 dari barisan geometri tersebut adalah $384.$

7. Tentukan S_5 dari deret geometri 20 + 10 + 5 +....

   Penyelesaian:

   Diketahui $a = 20, r = \frac{1}{2}$

   Maka $S_5 = \frac{20(1-\frac{1}{2}^5)}{(1-\frac{1}{2})}$

   $S_5 = \frac{20(1-\frac{1}{32})}{(\frac{1}{2})}$

   $S_5 = \frac{20(\frac{31}{32})}{(\frac{1}{2})}$

   $S_5 = \frac{\frac{620}{32}}{(\frac{1}{2})} = \frac{620}{32} x\ 2 = 38{,}75$

   Jadi, S_5 dari deret tersebut adalah 38,75

8. Tentukan S_{10} dari deret geometri 1 + 2 + 4 +8 + 16...

   Penyelesaian:

   Diketahui $a = 1, dan\ r = 2$

   Maka $S_{10} = \frac{1(2^{10}-1)}{(2-1)}$

   $S_{10} = \frac{1023}{(1)}$

   $S_{10} = 1.023$

   Jadi S_{10} dari deret geometri tersebut adalah 1.023.

9. Tentukan jumlah dari deret geometri tak terbatas berikut ini: 0,4, 0,04, 0,004...

Penyelesaian:

Diketahui $a = 0{,}4$ dan $r = 0{,}1$

S∞ = $\frac{a}{1-r}$

S∞ = $\frac{0{,}4}{1-0{,}1}$

S∞ = $\frac{0{,}4}{0{,}9} = \frac{4}{9}$

10. Jabarkan!

a. $(4 + y)^2$ b. $(2 - y)^4$

Penyelesaian:

a. Dengan menggunakan bantuan Segitiga Pascal, koefisien dapat diketahui

$1x4^2 + 2x4^1 + 1x40$

Tambahkan variabel y

$1x4^2xy^0 + 2x4^1xy^1 + 1x4^0xy^2$

Sehingga menghasilkan

$(4 + y)2 = 16 + 8y + y^2$

b. Dengan menggunakan bantuan Segitiga Pascal, koefisien dapat diketahui

$1\ x\ 24 + 4\ x\ 23 + 6\ x\ 22 + 4\ x\ 21 + 1\ x\ 20$

Tambahkan variabel $-y$

$$\begin{aligned} 1\ x\ 24\ x\ (-y)0 + 4\ x\ 23\ x\ (-y)\ 1 \\ + 6\ x\ 22\ x\ (-y)2 \\ + 4\ x\ 21\ x\ (-y)3 \\ + 1\ x\ 20\ x\ (-y)4 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan

$(2 - y)4 = 16 - 32\ y + 24y - 8\ y3 + y4$

11. Tentukan koefisien dari x^{17}dalam penjabaran $(x + 2)^{25}$!

Penyelesaian:

$$(x+2)^{25} = \binom{25}{0}x^{25} + \binom{25}{1}x^{24}2^{1} + \binom{25}{2}x^{23}2^{2} + \cdots + \binom{25}{8}x^{17}2^{8} + \cdots + \binom{25}{25}2^{25}$$

Sehingga didapatkan:

$$\binom{25}{8}x^{17}2^{8} = \binom{25}{8} = \frac{5!}{2!\,(25-8)!} = 1.081.575$$

Jadi koefisien dari x^{17} adalah $1.081.575 \times 2^{8} = 276.883.200.$

H. Rangkuman

1. Barisan adalah himpunan bilangan dengan urutan tertentu. Contoh: 2, 4, 6, 8, ... Deret adalah jumlah semua suku pada sebuah barisan. Contoh: 2 + 4 + 6 + 8 +...
2. Barisan Aritmatika adalah barisan yang di mana setiap suku yang dihasilkan adalah dengan menambahkan atau mengurangkan suku dengan bilangan tetap. Contoh: 2, 5, 8, 11, ... dan 14, 10, 6, 2,...juga termasuk barisan aritmatika.
3. Deret aritmatika adalah jumlah semua suku pada barisan aritmatika. Contoh: 2 + 5 + 8 + 11+...
4. Barisan geometri adalah barisan yang di mana setiap suku yang dihasilkan adalah dengan mengalikan suku dengan bilangan tetap, bilangan tetap tersebut disebut dengan rasio. Contoh: 5, 10, 20, 40.

5. Deret geometri adalah jumlah semua suku pada barisan geometri, contohnya; $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$. Deret geometri tak terbatas adalah jumlah semua suku pada barisan geometri yang tak terbatas.
6. Binomial adalah suatu persamaan dengan dua suku. Beberapa contoh binomial adalah $(a+b)^2$, $(2+x)^4$, $(a+b)^{1/2}$. Binomial $(a+b)^2$ dijabarkan: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
7. Koefisien binomial dapat ditemukan dengan bantuan Segtiga Pascal, selain itu dapat menggunakan tabel binomial juga dengan rumus kombinasi $\binom{n}{r}$ atau ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.
8. Teorema binomial dapat ditulis secara formal sebagai berikut:
   $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} a^{n-r}b^r$, untuk $n \in Z^+$ dimana $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

I. Evaluasi

1. Diketahui suatu barisan aritmatika dengan $U_2 = 8$ dan $U_6 = 20$. Tentukan U_{20}!
2. Diketahui barisan 100, 95, 90, 85,... Jumlah S_{10} dari barisan tersebut adalah?
3. Sebuah barisan geometri $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, ... Tentukan U_{15}!
4. Diketahui duatu barisan geometri $U_2 = 10$, $U_5 = 80$. Tentukan S_{10}!

5. Diketahui barisan geometri yang terdiri dari empat suku dengan rasio $\frac{1}{2}$ dan suatu barisan aritmatika dengan beda b. jumlah semua suku barisan geometeri tersebut dan jumlah semua suku barisan aritmatika tersebut masing-masing bernilai 1. Jika suku pertama barisan geometri tersebut sama dengan suku ketiga barisan aritmatika, maka nilai b adalah
6. Dalam rangka memperingati hari kemerdekaan Republik Indonesia, Desa Suka Maju mengadakan lomba mengambil kelereng dari wadah dengan aturan sebagai berikut:
    - Setiap tim terdiri dari 5 anggota dan setiap anggota wajib mengambil kelereng sesuai urutannya
    - Pada pengambilan putaran pertama (5 orang secara bergantian) hanya diperbolehkan mengambil masing-masing 1 kelereng
    - Pada putaran kedua, orang pertama setiap kelompok mengambil 2 kelereng dan selalu bertambah 2 kelereng untuk anggota pada urutan berikutnya dalam kelompok tersebut
    - Pada putaran ketiga, setiap anggota tim mengambil 2 kelereng lebih banyak dari anggota sebelumnya.

    Tim A beranggotakan Andi, Beni, Cendy, Dani, dan Eko (urutan pengambilan kelereng sesuai urutan abjad awal nama). Bersamaan dengan habisnya waktu Tim A berhasil mengumpulkan 255 kelereng. Banyak kelereng yang berhasil diambil oleh Eko pada putaran ketiga adalah?

7. Misalkan S = $(x-1)^4 + 4(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 4(x-1) + 1$. Jika disederhanakan, maka S =…
8. Bila disusun dimulai dari suku variabel dengan pangkat yang tertinggi, suku keenam dari ekpansi binomial
   $(a + \frac{1}{2}b)^9$ adalah…
9. Banyaknya suku yang mengandung variabel x^7 dari ekspansi $(2x^2 - 4y^5)^8$ adalah…
10. Tentukan koefisien binomial dari variabel x^{14} dari ekspansi binomial $(x + 2x^3)^{10}$ adalah…

*****

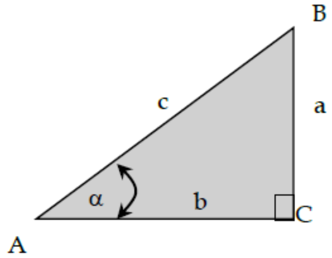
BAB 5
TRIGONOMETRI

A. Tujuan Pembelajaran

- Mahasiswa mampu menjelaskan definisi trigonometri
- Mahasiswa mampu menjelaskan sudut berelasi
- Mahasiswa mampu menentukan persamaan trigonometri menggunakan identitas trigonometri
- Mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal terkait trigonometri

B. Definisi Trigonometri

Trigonometri dapat di artikan sebagai cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang perbandingan ukuran sisi suatu segitiga apabila ditinjau dari salah satu sudut yang terdapat pada segitiga tersebut. Berikut merupakan perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku:



Gambar 5.1 Segitiga siku-siku ABC

Gambar 5.1. di atas adalah segitiga siku-siku dengan titik sudut sikunya di C. Panjang sisi di hadapan sudut A adalah a, panjang sisi di hadapan sudut B adalah b, dan panjang sisi di hadapan sudut C adalah c. Tehadap sudut α, diperoleh bahwa:

Sisi a disebut sisi siku-siku di depan sudut α

Sisi b disebut sisi siku-siku di dekat (berimpit) sudut α

Sisi c (sisi miring) disebut hipotenusa

Berdasarkan keterangan diatas, didefinisikan 6 perbandingan trigonometri terhadap sudut α sebagai berikut :

1. $\sin\alpha = \frac{panjang\ sisi\ siku{-}siku\ didepan\ sudut\ A}{panjang\ hipotenusa} = \frac{a}{c}$
2. $\cos\alpha = \frac{panjang\ sisi\ siku{-}siku\ di\ dekat\ (berimpit) sudut\ A}{panjang\ hipotenusa} = \frac{b}{c}$
3. $\tan\alpha = \frac{pajang\ sisi\ siku{-}siku\ didepan\ sudut\ A}{panjang\ sisi\ siku{-}siku\ di\ dekat\ sudut\ A} = \frac{a}{b}$
4. $\csc\alpha = \frac{panjang\ hipotenusa}{panjang\ sisi\ siku{-}siku\ didepan\ sudut\ A} = \frac{c}{a}$
5. $\sec\alpha = \frac{panjan\ hipotenusa}{panjang\ sisi\ siku{-}siku\ didepan\ sudut\ A} = \frac{c}{b}$
6. $\cot\alpha = \frac{panjan\ sisi\ siku{-}siku\ didekat\ sudut\ A}{panjang\ sisi\ siku{-}siku\ didepan\ sudut\ A} = \frac{b}{a}$

Dari perbandingan tersebut dapat pula ditulis rumus:

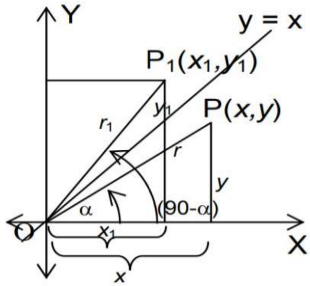
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ dan $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ dan $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

C. Sudut Berelasi

Sudut-sudut yang berelasi dengan sudut α adalah sudut $(90° \pm \alpha)$, $(180° \pm \alpha)$ dan $-\alpha$.Dua buah sudut yang berelasi ada yang di beri nama khusus, misalnya penyiku (komplemen) yaitu untuk sudut $\alpha°$ dengan $(90° - \alpha)$ dan pelurus (suplemen) untuk sudut $\alpha°$ dengan $(180° - \alpha)$. Contoh: penyiku sudut $50°$ adalah $40°$, pelrus sudut $110°$ adalah $70°$. Berikut rumus perbandingan trogometri sudut berelasi:

1. Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan (90° - α)



Gambar 5.2. Sudut Berelasi (90° - α)

Berdasarkan gambar 6.2 diatas diketahui titik $P_1(x_1, y_1)$ bayangan dari $P(x, y)$ akibat pencerminan garis $y = x$, sehingga di peroleh :

- $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = 90° - \alpha$
- $x_1 = x, y1 = y \; dan \; r1 = r$

Dengan menggunakan hubungan diatas dapat di peroleh:

a. $\sin(90° - \alpha) = \frac{ordinat\ P}{panjang\ OP} = \frac{y}{r} = \frac{x}{r} = \cos \alpha$

b. $\cos(90° - \alpha) = \dfrac{absis\ P}{panjang\ OP} = \dfrac{x}{r} = \dfrac{y}{r} = sin\alpha$

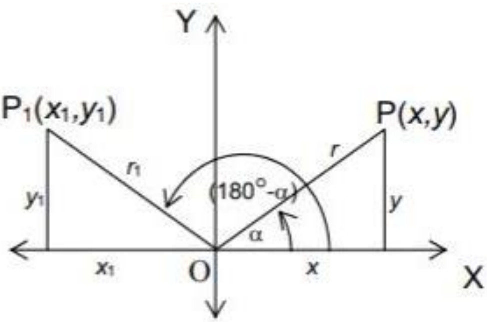
c. $\tan(90° - \alpha) = \dfrac{ordinat\ P}{absis\ P} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y} = \cot\alpha$

Dari perhitungan tersebut maka rumus perbandingan trigonometri sudut α dengan (90°- α) dapat dituliskan sebagai berikut:

a. $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	d. $\csc(90° - \alpha) = \sec\alpha$
b. $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	e. $\sec(90° - \alpha) = \csc\alpha$

$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$ $\qquad$ $\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$

2. Perbandingan trigonometri untuk α °dengan (180°- α)



Gambar 5.3 Sudut Berelasi (180°- α)

Berdasarkan gambar diatas titik $P1(x1, y1)$ adalah bayangan dari titik P(*x,y*) akibat pencerminan terhadap sumbu y, sehingga

- $\angle$XOP = α dan $\angle XOP_1$ = 180°- α
- $x1 = -x, y1 = y\ dan\ r1 = r$

Maka diperoleh hubungan:

a. $\sin(180° - \alpha) = \dfrac{y1}{r1} = \dfrac{y}{r} = \sin\alpha$

b. $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x1}{r1} = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha$

c. $\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{y1}{x1} = \frac{y}{-x} = -\tan\alpha$

Dari Hubungan di atas diperoleh rumus:

a. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

b. $\csc(180^\circ - \alpha) = \csc\alpha$

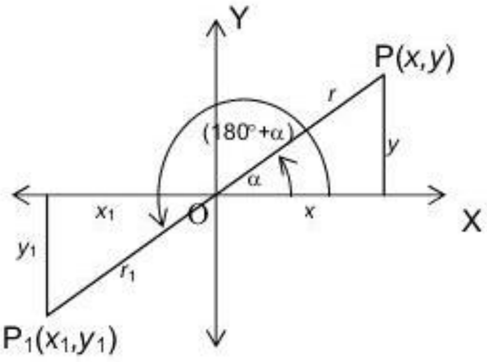
c. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

d. $\sec(180^\circ - \alpha) = \sec\alpha$

e. $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$

f. $\cot 180^\circ - \alpha = -\cot\alpha$

3. Perbandingan trigonometri untuk sudut α° dengan $(180^\circ + \alpha)$



Gambar 5.4 Sudut Berelasi $(180^\circ + \alpha)$

Berdasarkan gambar diatas titik $P1(x1, y1)$ adalah bayangan dari titik $P(x, y)$ akibat pencerminan terhadap garis $y = -x$, sehingga :

- $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP1 = 180^\circ + \alpha$
- $x1 = -x, y1 = -y$ dan $r1 = r$

Maka diperoleh hubungan:

a. $\sin(180° + \alpha) = \frac{y1}{r1} = \frac{-y}{r} = -\sin\alpha$

b. $\cos(\,180° + \alpha) = \frac{x1}{r1} = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha$

c. $\tan(180° + \alpha) = \frac{y1}{x1} = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\alpha$

Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

a. $\sin(\,180° + \alpha) = -\sin\alpha$

b. $\csc(180° + \alpha) = -\csc\alpha$

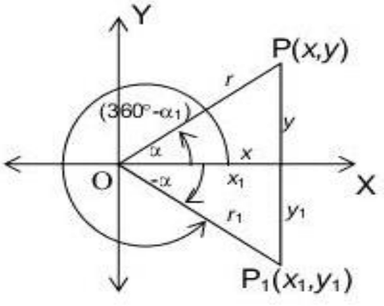
c. $\cos(\,180° + \alpha) = -\cos\alpha$

d. $\sec(180° + \alpha) = -\sec\alpha$

e. $\tan(180° + \alpha) = -\tan\alpha$

f. $\cot 180° + \alpha = \cot\alpha$

4. Perbandingan trigonometri untuk sudutα dengan $(-\alpha)$



Gambar 5.5 Sudut Berelasi $(-\alpha)$

Berdasarkan gambar diatas diketahui titik $P_1(x_1,y_1)$ bayangan dari $P(x,y)$ akibat pencerminan terhadap sumbu x, sehingga:

- $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = -\alpha$

- $x_1 = x, y_1 = -y$ dan $r_1 = r$

Maka diperoleh hubungan :

a. $\sin(-\alpha) = \frac{y1}{r1} = \frac{-y}{r} = -\sin\alpha$

b. $\cos(-\alpha) = \frac{x1}{r1} = \frac{x}{r} = \cos\alpha$

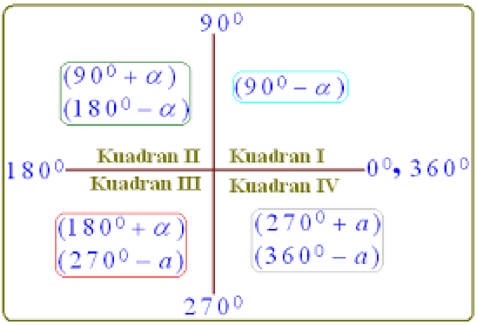
c. $\tan(-\alpha) = \frac{y1}{x1} = \frac{-y}{x} = -\tan\alpha$

Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

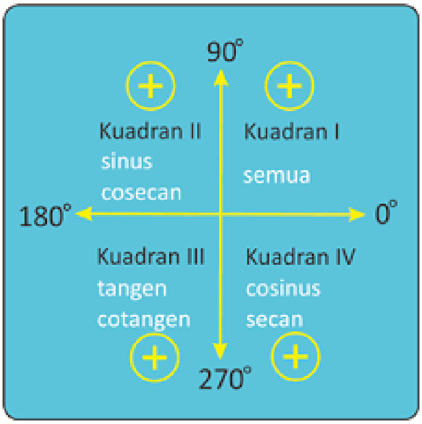
a. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	d. $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$
b. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	e. $\sec(-\alpha) = -\sec\alpha$
c. $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	f. $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

Untuk relasi α dengan $(-\alpha)$ tersebut identik dengan relasiα dengan $360^\circ - \alpha$, misalnya $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$.

Dengan memperhatikan nilai perbandingan sudut yang berelasi, dapatdisimpulkan bahwa nilai perbandingan sudut, nilai positif atau negatifnya terletak pada kuadran di mana sudut itu berada.



Gambar 5.6 Sudut Berelasi Pada Kuadaran I-IV



Gambar 5.7

Nilai Perbandingan Trigobometri Pada Kuadran I-IV

Berdasarkan gambar 5.7, maka dapat disimpulkan bahwa:

- Kuadran I : **sem**ua (sinus, kosinus, tangen, kotangen, sekan dan kosekan)
- Kuadran II : **sin**us (bersama kosekan)
- Kuadran III : **tan**gen (bersama kotangen)
- Kuadran IV : **kos**inus (bersama sekan)

D. Persamaan Trigonometri

Persamaan trigonometri adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih fungsi trigonometri, dan perbandingan trigonometri suatu sudut, di mana sudutnya dalam ukuran derajat atau radian.

1. Persamaan Dasar

a. Menyelesaikan persamaan $\sin x = \sin \alpha$

$$\sin x = \sin \alpha \begin{cases} x = \alpha + K.360° \\ x = (180 - \alpha) + K.360° \end{cases} K \in B$$

b. Menyelesaikan persamaan $\cos x = \cos \alpha$

$$\cos x = \cos \alpha \begin{cases} x = \alpha + K.360^\circ \\ x = -\alpha + K.360^\circ \end{cases} K \in B$$

c. Menyelesaikan persamaan $\tan x = \tan \alpha$

$$\tan x = \tan \alpha \{ x = \alpha + K.180^\circ \; K \in B$$

2. Persamaan Bentuk $a \cos x + b \sin x = c$

Cara penyelesaian persamaan tersebut diatas sebagai berikut:

$k \, Cos \, x \, (x - \alpha) = c$, dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}, \alpha = arc \tan \frac{b}{a}$

Penentuan letak sudut α :

- Jika a +, b + → α di kuadran I
- Jika a –, b + → α di kuadran II
- Jika a –, b – → α di kuadran III
- Jika a +, b – → α di kuadran IV

E. Identitas Trigonometri

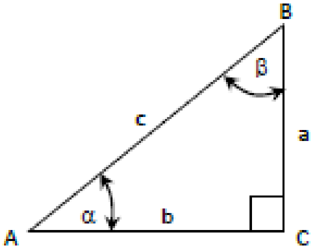
Identitas trigonometri merupakan suatu relasi yang melibatkan fungsi trigonometri yang berlaku untuk semua nilai sudut yang didefinisikan fungsinya. Identitas trigonometri memiliki fungsi sebagai berikut :

1. Menyederhakan persamaan yang rumit,
2. Menuliskan suatu fungsi dalam bentuk fungsi lainnya,
3. Membuktikan identitas lain, dan
4. Menyelesaikan persamaan trigonometri.

Identitas trigonometri dapat ditunjukkan kebenarannya dengan beberapa cara, diantaranya adalah:

1. Mengubah salah satu bentuk rumus (biasanya dipilih yang bentuknya agar rumit) sehingga diperoleh bentuk sama dengan rumus yang lain.
2. Mengubah masing-masing ruas sehingga diperoleh bentuk yang sama.

Berdasarkan gambar 6.8. berikut ini maka dapat kita buktikan beberapa identitas dalam trigonometri:



Gambar 5.8 Segitiga Siku-Siku ABC

1. $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$

   Pembuktian:

   $$cos^2\alpha + sin^2\alpha = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

   $$cos^2\alpha + sin^2\alpha = \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}$$

   $$cos^2\alpha + sin^2\alpha = \frac{b^2+a^2}{c^2}$$

   $$cos^2\alpha + sin^2\alpha = \frac{c^2}{c^2}$$

   $$cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$$

2. $1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha$

   Pembuktian:

   $$1 + tan^2\alpha = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

   $$1 + tan^2\alpha = \frac{b^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}$$

$$1 + tan^2\alpha = \frac{b^2 + a^2}{b^2}$$

$$1 + tan^2\alpha = \frac{c^2}{b^2}$$

$$1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha$$

3. $1 + cotan^2\alpha = cosec^2\alpha$

   Pembuktian:

$$1 + cotan^2\alpha = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$1 + cotan^2\alpha = \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}$$

$$1 + cotan^2\alpha = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

$$1 + cotan^2\alpha = \frac{c^2}{a^2}$$

$$1 + cotan^2\alpha = cosec^2\alpha$$

4. $\tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

   Pembuktian:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{c}}$$

$$\tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$$

5. $\operatorname{cotan}\alpha = \frac{\cos\alpha}{sin\alpha}$

   Pembuktian:

$$\operatorname{cotan}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{cotan}\alpha = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}$$

$$\operatorname{cotan}\alpha = \frac{\cos\alpha}{sin\alpha}$$

6. $\cot\text{an}\,\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$

Pembuktian:

$\text{cotan}\,\alpha = \frac{b}{a}$

$\text{cotan}\,\alpha = \frac{1}{\frac{a}{c}}$

$\text{cotan}\,\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$

7. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

Pembuktian:

$\sec\alpha = \frac{c}{b}$

$\sec\alpha = \frac{1}{\frac{b}{c}}$

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

8. $\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

Pembuktian:

$\text{cosec}\,\alpha = \frac{c}{a}$

$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\frac{a}{c}}$

$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

F. Rumus-Rumus Trigonometri

1. Rumus Trigonometri untuk Jumlah Dua Sudut dan Selisih Dua Sudut

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

2. Rumus Trigonometri untuk Sudut Rangkap

$$sin\ 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha$$

$$=2\ cos^2\alpha-1$$

$$=\ 1-\ 2\ sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\ sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha=4cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

3. Rumus Perkalian Sinus dan Kosinus

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{-1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

4. Rumus Penjumlahan dan Pengurangan Sinus dan Kosinus

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

G. Contoh-Contoh Soal

1. Dalam segitiga ABC diketahui b = 8 cm, c = 5 cm, dan sudut A= 60°. Tentukan panjang sisi a?

   Penyelesaian:

   Dengan menggunakan aturan cosinus diperoleh:

   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

   $a^2 = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 60°$

   $a^2 = 64 + 25 - 80.\left(\frac{1}{2}\right)$

   $a^2 = 49$

   $a = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

   Karena a menyatakan panjang, maka nilai a yang memenuhi adalah 7 cm.

2. Pada segitiga ABC diketahui panjang sisi AB = 10 cm, sisi AC = 12 cm, dan sisi B = $\frac{4}{5}$. Tentukan nilai cos C?

   Penyelesaian:

   Panjang sisi AB = c = 10 cm; Panjang sisi AC = b = 12 cm; sin B = $\frac{4}{5}$

   Dengan menggunakan aturan sinus diperoleh:

   $$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{12}{\frac{4}{5}} = \frac{10}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{\frac{4}{5} \times 10}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Menggunakan Identitas Trigonometri diperoleh:

$$sin^2 C + cos^2 C = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + cos^2 C = 1$$

$$cos^2 C = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\cos C = \frac{1}{3}\sqrt{5}$$

3. Jika α dan β adalah sudut lancip, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ dan $\sin\beta = \frac{7}{25}$. Tentukan nilai $\cos(\alpha + \beta)$?

Penyelesaian:

$$* \; cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$$

$$cos^2\alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$*cos^2\beta + sin^2\beta = 1$$

$$cos^2\beta + \left(\frac{7}{25}\right)^2 = 1$$

$$cos^2\beta = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$$

$cos\ \beta = \frac{24}{25}$

$*\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5}.\frac{24}{25} - \frac{3}{5}.\frac{7}{25}$

$= \frac{96}{125} - \frac{21}{125} = \frac{75}{125} = \frac{3}{5}$

Jadi nilai dari $\cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{5}$.

4. Nilai x yang memenuhi $0\ \leq\ x\ \leq \pi$ dan

$\frac{1}{\sin(\frac{x}{2^{2010}})} = 2^{2010}\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(\frac{x}{4}) \dots\dots\dots \cos(\frac{x}{2^{2010}})$?

Penyelesaian:

Menurut aturan sinus sudut rangkap, ada rumus:

$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

sehingga: $\frac{\sin 2\alpha}{2\ \sin\alpha} = \cos\alpha$

Dengan mensubstitusikan rumus diatas yang bercetak tebal kedalam persamaan soal, maka didapat:

$$\frac{1}{\sin(\frac{x}{2^{2010}})} = 2^{2010}\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(\frac{x}{4}) \dots\dots\dots \cos(\frac{x}{2^{2010}})$$

$$\frac{1}{\sin(\frac{x}{2^{2010}})}$$

$$= 2^{2010}\sqrt{2}\frac{\sin 2.\left(\frac{x}{2}\right)}{2.\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\frac{\sin(\frac{x}{4})}{2.\,sin(\frac{x}{4})} \dots\dots\dots \frac{\sin 2(\frac{x}{2^{2010}})}{2\sin(\frac{x}{2^{2010}})}$$

$$\frac{1}{\sin(\frac{x}{2^{2010}})}$$

$$= 2^{2010}\sqrt{2}\,\frac{\sin(x)}{2.\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\sin(\frac{x}{2})}{2.\,sin(\frac{x}{4})} \ldots\ldots\ldots \frac{\sin(\frac{x}{2^{2009}})}{2\sin(\frac{x}{2^{2010}})}$$

$$\frac{1}{\sin(\frac{x}{2^{2010}})} = 2^{2010}\sqrt{2}\,\frac{\sin(x)}{2.\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\sin(\frac{x}{2})}{2.sin(\frac{x}{4})} \ldots\ldots\ldots \frac{\sin(\frac{x}{2^{2009}})}{2\sin(\frac{x}{2^{2010}})}$$

$$\frac{1}{\sin(\frac{x}{2^{2010}})} = 2^{2010}\sqrt{2}\,\frac{\sin(x)}{2} \cdot \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2^{2010}})}$$

$$\frac{1}{\sin(\frac{x}{2^{2010}})} = 2^{2010}\sqrt{2}\,\frac{\sin(x)}{2^{2010}\sin(\frac{x}{2^{2010}})}$$

$$\frac{sin(\frac{x}{2^{2010}})}{\sin(\frac{x}{2^{2010}})} = 2^{2010}\sqrt{2}\,\frac{\sin(x)}{2^{2010}}$$

$$\frac{sin(\frac{x}{2^{2010}})}{\sin(\frac{x}{2^{2010}})} = \sin x\sqrt{2}\,\frac{2^{2010}}{2^{2010}}$$

Sehingga didapat persamaan yang sederhana, yaitu:

$\sqrt{2}\ \sin x = 1 \quad \rightarrow \quad sin\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Sehingga nilai x yang memenuhi persamaan pada soal adalah nilai x yang memenuhi persamaan :

$$\boldsymbol{Sin\ x = \frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

Karena 0 ≤ x ≤ π dalam rad, atau 0 ≤ x ≤ 180º dalam derajat, maka nilai x yang memenuhi adalah 45º dan 135º, sehingga nilai x adalah :

$\mathbf{\frac{45}{180}\,\pi\ rad = \frac{\pi}{4}\ rad\ dan\ \frac{135}{180}\,\pi\ rad = \frac{3}{4}\,\pi\ rad}$

Sehingga nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah 0,25 π rad dan 0,75 π rad.

5. Apakah $\sin A \cos A\,(\tan A + \cot A) = 1$. Buktikanlah!

   Penyelesaian:

   $\sin A \cos A\,(\tan A + \cot A) = 1$

   $\sin A \cos A \left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}\right) = 1$

   $\sin A \cos A \left(\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A}\right) = 1$

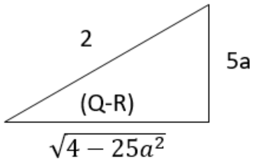
   $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

   $1 = 1$

   $\therefore \sin A \cos A\,(\tan A + \cot A) = 1$ **(Terbukti)**

6. Diketahui segitiga PQR siku-siku di P. Jika $\sin Q \cdot \sin R = \frac{3}{10}$ dan $\sin (Q - R) = \frac{5}{4} a$. Maka berapakah nilai a?

   Penyelesaian:

   $Sin\ Q \cdot \sin R = \frac{3}{10}$

   $Sin\ (Q - R) = \frac{5}{2} a$

   Q +R = 90°

   $Cos\ (Q - R) = \frac{\sqrt{4 - 25\, a^2}}{2}$

   $Cos\ (Q + R) = \cos Q \cdot \cos R - \sin Q \cdot \sin R$

   $Cos\ 90° = \cos Q \cdot \cos R - \frac{3}{10}$

   $Cos\ Q \cdot \cos R = \frac{3}{10}$

   $Cos\ (Q - R) = \cos Q \cdot \cos R + \sin Q \cdot \sin R$

$\frac{\sqrt{4-25a^2}}{2} \qquad = \frac{3}{10} + \frac{3}{10}$

$\frac{\sqrt{4-25a^2}}{2} \qquad = \frac{6}{10}$

$\frac{4-25a^2}{2} \qquad = \frac{9}{25}$

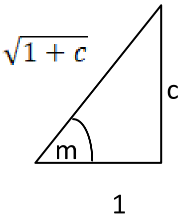
$100 - 625a^2 \qquad = 36$

$64 = 625a^2$

$a = \frac{8}{25}$

7. Jika $\frac{\pi}{2} < m < \pi$ dan tan m = c, maka sin m - $\frac{1}{\cos m}$ adalah?

   Penyelesaian:



   Tan m = $\frac{c}{1}$ maka $c < 0$

   Sin m - $\frac{1}{\cos m}$ = $\frac{-c}{\sqrt{1+c^2}}$ - (-$\sqrt{1+c^2}$)

   $= \frac{c^2-c+1}{\sqrt{1+c^2}}$

8. Jika diketahui tan b = p. Maka hitunglah tan $\frac{1}{2}$b ?

   Penyelesaian:

   Tan b = p $\longrightarrow$ tan $(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b) = \frac{\tan\frac{1}{2}b + \tan\frac{1}{2}b}{1 - \tan\frac{1}{2}b . \tan\frac{1}{2}b}$ = p

   $= \frac{2\tan\frac{1}{2}b}{1-\tan^2\frac{1}{2}b}$ = p

Maka $2tan\frac{1}{2}b = p - p\,tan^2\frac{1}{2}\,b$

$$P\,tan^2\frac{1}{2}\,b + 2\,tan\,\frac{1}{2}\,b - p = 0$$

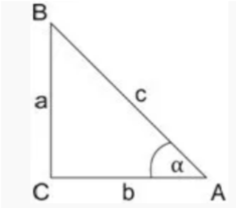
$$tan\frac{1}{2}b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+p^2}}{p}$$

H. Rangkuman

1. Trigonometri yaitu lmu matematika yang mempelajari tentang sudut, sisi, dan perbandingan antara sudut terhadap sisi. Dasarnya menggunakan bangun datar segitiga.Hal ini karena trigonometri berasal dari dua kata yunani, yaitu Trigonos yang berarti segitiga dan metron yang berarti ukuran.
2. Sisi AB merupakan sisi miring segitiga

   Sisi BC merupakan sisi depan sudut α

   Sisi AC merupakan sisi samping sudut α



3. Identitas Trigonometri memiliki beberapa manfaat diantaranya: menyederhakan persamaan yang rumit, menuliskan suatu fungsi dalam bentuk fungsi lainnya, membuktikan identitas lain, dan menyelesaikan persamaan trigonometri.
4. Rumus Trigonometri untuk Jumlah Dua Sudut dan Selisih Dua Sudut

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Rumus Trigonometri untuk Sudut Rangkap

$$sin\ 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$

$$= 2\ cos^2\alpha - 1$$

$$= 1 - 2\ sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\ sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Rumus Perkalian Sinus dan Kosinus

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{-1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

Rumus Penjumlahan dan Pengurangan Sinus dan Kosinus

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

I. Evaluasi / Soal Latihan

Kerjakan soal berikut dengan tepat!

1. Tentukan nilai dari $\frac{\sin 150^\circ + \sin 120^\circ}{\cos 210^\circ - \cos 300^\circ}$?
2. Jika $\frac{\tan^2 x}{1+\sec x} = 1, 0^\circ < x < 90^\circ$. Maka tentukan besar sudut x?
3. Jika A+B+C = 360, maka $\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}$adalah?
4. Jika α, β dan γ sudut-sudut segitiga ABC dan

   $$\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\gamma & \cos\frac{1}{2}\gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   maka γ:....
5. Sin $[\sin(3x-2y)\sin 2(x-y)]$ = a dan cos $[\cos(3x-2y)\cos 2(x-y)]$ = b.

   Jika dinyatakan dengan a dan b maka cos (cos x) adalah?

*****

DAFTAR PUSTAKA

Goldie, S. 2012. *Pure Mathematics 1*. London: Hodder Education an Hachette UK Company.

Goldie, S. 2012. *Pure Mathematics 2 & 3*. London: Hodder Education an Hachette UK Company.

https://www.xyz.my.id/2019/09/soal-soal-persamaan-dan-fungsi-kuadrat.html

https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-fungsi-kuadrat/

Martin, A., Brown, K., Rgby, P., & Riley, S. Pure *Mathematics*. Cheltenham: Stanley Thornes.

Neill, H. & Quidling, D. (2002). *Pure Mathematics 1*. Cambridge University Press.

Yuana, R. A. & Indiyastuti. (2017). *Perspektif Matematika untuk SMA Kelas X SMA dan MA Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.* Solo: PT Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Zaelani, A., Cunayah, C., & Irawan, E.I. (2009). *1700 Bank Soal Matematika Untuk SMA/MA*. Bandung: Yrama Widya.

TENTANG PENULIS

Sari Saraswati, M.Pd., lahir di Jombang pada tahun 1987, menyelesaikan studi Pendidikan Matematika pada tahun 2011 di STKIP PGRI Jombang dan Magister Pendidikan Matematika di Unversitas Sriwijaya pada tahun 2015 dengan konsentrasi dalam bidang Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI) melalui program *International Master Program on Mathematics Education* (IMPoME) yang diselenggarakan atas kerjasama UNSRI-UNESA-UTRECHT.

Sejak tahun 2015 hingga sekarang, penulis mengembangkan profesinya sebagai dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Hasyim Asy'ari Tebuireng. Prestasi yang pernah dicapai adalah memenangkan hibah RISTEKDIKTI dalam skema penelitian dosen pemula pada tahun 2017, 2018, 2020 dan 2021. Selain itu, penulis aktif dalam menulis buku yang berjudul "Matematika: Strategi Pemecahan Masalah", "Kalkulus Dasar Pendekatan Blended Learning", dan masih banyak lainnya, aktif dalam menulis artikel ilmiah, serta aktif dalam berbagai penelitian bidang Pendidikan dan Matematika. Dapat dihubungi melalui email: *sarisaraswati7@gmail.com.*

Iesyah Rodliyah, S.Si., M.Pd., lahir di Gresik pada tanggal 03 Juli 1990, menyelesaikan studi Matematika Murni yang ditempuh selama 7 semester dengan beasiswa berprestasi setiap tahunnya di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2012 dan Magister Pendidikan Matematika di Unversitas Negeri Surabaya pada tahun 2014. Pada tahun 2012 menjadi tenaga pengajar matematika dan Pembina olimpiade Sains dan Matematika tingkat SD dan SMP di beberapa sekolah swasta.

Mulai mengembangkan profesinya sebagai Dosen tetap pada Program Studi S1 Pendidikan Matematika di Universitas Hasyim Asy'ari sejak tahun 2014 sampai sekarang. Aktif menulis buku, buku pertamanya merupakan buku Antologi bersama penulis *best seller* Ahmad Rifa'i Rif'an dengan judul "*Hope* Masih Ada Hari Esok", buku kedua berjudul 'Strategi *Experiential Learning* Berbasis Karakter (Teori dan Praktik) aktif menulis artikel ilmiah terkait dunia pendidikan khususnya pendidikan matematika, serta aktif dalam berbagai penelitian bidang Pendidikan dan Matematika. Bisa dihubungi melalui *email iesyahrodliyah90@gmail.com.*

***

Novia Dwi Rahmawati, S.Si., M.Pd., Dosen Tetap di Prodi Pendidikan Matematika Universitas Hasyim Asy'ari Tebuireng Jombang sampai sekarang. Penulis penerima hibah penelitian RISTEK-BRIN dan penulis buku referensi Pengembangan dan Penyelesaian Soal *Higher Order Thinking Skill* (HOTS) Melalui Matematika untuk Siswa Sekolah Dasar (2020), buku referensi proses berpikir kreatif dalam pengajuan masalah matematika (2020) dan buku chapter Pembelajaran di Masa Covid-19 Work From Home (2020). Pembimbing Kompetisi Bisnis Mahasiswa Indonesia (KBMI) pada tahun 2017 dan Pendamping Expo KMI (Kewirausahaan Mahasiswa Indonesia) Pontianak 2017. Hasil publikasi dapat dilihat: *https://scholar.google.co.id/citations?user=WknSzuQAAAAJ&hl=id*

*****