

PROSES BERPIKIR MATEMATIS MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH PEMBUKTIAN

Siti Faizah¹, Novia Dwi Rahmawati²

¹Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Pendidikan, Universitas Hasyim Asy'ari

²Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Pendidikan, Universitas Hasyim Asy'ari

E-mail : izahfaiz90@gmail.com¹

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengeksplorasi proses berpikir matematis mahasiswa ketika menyelesaikan masalah pembuktian. Penelitian ini termasuk dalam jenis kualitatif. Subjek penelitian adalah mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Hasyim Asy'ari semester 2. Pengumpulan data pada penelitian ini menggunakan tes tertulis dan wawancara. Data yang telah terkumpul kemudian dianalisis berdasarkan transkrip wawancara, reduksi data, dan interpretasi data. Hasil penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa melakukan proses berpikir matematis melalui dunia perwujudan untuk mengklasifikasikan informasi yang terdapat pada pernyataan yang akan dibuktikan. Selanjutnya, subjek menggunakan dunia simbolik untuk menentukan konsep matematika yang akan digunakan sebagai dasar dalam menguraikan pembuktian melalui symbol-simbol aljabar. Tahap terakhir, subjek membuat kesimpulan yang bersifat formal.

Kata kunci: Berpikir, Matematis, Pembuktian

Abstract

This reseaech aimed to explore student math thinking process when doing proof problem. This research used qualitative design. The subject of this research was 2nd semester students in math study program in Hasyim Asy'ari University. The data collection used was written test and interview. The data collection then bring analyzed by using interview script, data reduction and data interpretation. The result showed that students doing math thinking process through embodiment world to clasify information existed in the statement will be proved. Next, the subject used symbolic world to find out the math concept will be used as the basic to elaborate proof by using algebraic symbols. The last, subject make formal conclusion.

Key words: Thinking, Mathematical, Proof

1. PENDAHULUAN

Berpikir merupakan aktivitas mental atau intelektual yang dilakukan oleh individu. Berpikir dapat diartikan sebagai aktivitas mental yang terjadi di otak untuk mengingat, memahami, mencari atau membuat cara, menganalisis, mensintesis masalah dalam rangka menyelesaikannya (Subanji, 2011). Berpikir juga merupakan suatu proses membentuk representasi mental melalui transformasi interaksi kompleks berdasarkan atribut mental yang mencakup pertimbangan, pengabstrakan, penalaran, penggambaran, pemecahan masalah, pembentukan konsep, kreativitas dan kecerdasan (Solso dkk, 2007). Proses berpikir terjadi pada saat seseorang dihadapkan pada masalah yang membutuhkan penyelesaian. Proses berpikir dimulai dari aktivitas kognitif yang dilakukan oleh mahasiswa dalam menyelesaikan

permasalahan matematika. Oleh karena itu berpikir dapat diartikan sebagai aktivitas mental yang terjadi di dalam otak pada saat seseorang menghadapi masalah yang harus diselesaikan.

Masalah dalam pembelajaran matematika dapat berupa soal yang menuntut kemampuan berpikir matematis bagi setiap mahasiswa. Dalam dunia matematika terdapat tiga hal yang perlu diperhatikan, yakni *conceptual-embodied world* (dunia perwujudan), *proceptual-symbolic world* (dunia simbolik), dan *axiomatic-formal world* (dunia formal) (Tall, 2008e; Tall, 2005f). *Conceptual-embodied world* adalah dunia perwujudan konsep berdasarkan persepsi dan refleksi. Mahasiswa memikirkan konsep dengan cara memulai dari hal-hal yang bisa dirasakan secara fisik dan juga secara mental. *Proceptual-symbolic world* merupakan dunia simbolik yang dapat tumbuh melalui aksi ketika melakukan perhitungan dan simbol sebagai konsep yang sedang dipikirkan. Keduanya saling terkait karena proses merupakan aktivitas ketika melakukan sesuatu dan konsep merupakan obyek yang sedang dipikirkan, sehingga keduanya disebut sebagai *procept* (*process and concept*). *Axiomatic-formal world* merupakan dunia formal aksiomatik yang berupa pengetahuan mahasiswa berdasarkan aksioma, teorema, dan juga definisi dari suatu obyek formal (Sudirman et al., 2015).

Hasil penelitian terdahulu menyebutkan bahwa proses berpikir mahasiswa yang terjadi dalam otak dapat diketahui dari kognitif mahasiswa. Kognitif merupakan komunikasi berbasis kognitif mahasiswa untuk mengetahui aktivitas mental mahasiswa yang di dalam otak (Zayyadi et al., 2020). Proses berpikir matematis dapat dilakukan melalui eksplorasi terhadap suatu permasalahan yang akan diselesaikan atau dibuktikan. Mahasiswa membuat justifikasi yang berupa keyakinan terhadap hasil pembuktian suatu konjektur (Astawa et al, 2018). Konjektur merupakan pernyataan, argument, atau sistem konsep dalam matematika (Pedemonte, 2008). Suatu konjektur dapat diinterpretasikan dalam bentuk pernyataan yang memerlukan verifikasi atau pembuktian.

Suatu pernyataan dalam matematika dapat bernilai benar atau salah tetapi tidak bisa keduanya benar dan salah, sehingga perlu dilakukan pembuktian terhadap pernyataan tersebut. Artikel ini bertujuan untuk mengeksplorasi proses berpikir matematis mahasiswa dalam membuktikan kebenaran pernyataan aljabar terkait invers suatu matriks. Proses berpikir mahasiswa dieksplorasi dengan menggunakan teori tiga dunia matematika karena mahasiswa harus mampu melakukan pembuktian dalam bentuk simbol-simbol aljabar agar diperoleh pembuktian secara formal.

2. METODE

Penelitian ini termasuk dalam penelitian eksploratif dengan pendekatan kualitatif. Kemampuan mahasiswa dalam mengungkapkan proses berpikir yang dilakukan dapat diketahui dari eksplorasi melalui komunikasi verbal dan non-verbal. Sebagaimana yang disampaikan Zayyadi bahwasanya berpikir merupakan bentuk komunikasi satu arah antara seseorang dengan dirinya sendiri yang berlangsung di otak, sehingga tidak bisa diketahui orang lain (zayyadi et al, 2020)

Penelitian ini dilakukan kepada mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Hasyim Asy'ari. Mahasiswa yang bertindak sebagai subjek adalah mahasiswa semester 2 yang sedang menempuh mata kuliah Aljabar Linier Elementer. Pemilihan subjek penelitian didasarkan pada kemampuan mahasiswa dalam mengungkapkan secara lisan terkait aktivitas mental yang dilakukan saat menyelesaikan masalah aljabar. Pemilihan subjek juga didasarkan pada kemampuan matematika tinggi, sedang, atau rendah. Peneliti memilih mahasiswa dengan kemampuan tinggi untuk dijadikan subjek penelitian, karena ia mampu melakukan pembuktian secara formal melalui dunia perwujudan.

Pengumpulan data pada penelitian ini dilakukan dengan menggunakan tes masalah pembuktian, dan juga wawancara. Adapun tes yang diberikan kepada subjek penelitian adalah sebagai berikut:

"Tunjukkan bahwa jika sebuah matriks bujur sangkar A memenuhi $A^2 - 3A + I = 0$ maka $A^{-1} = 3I - A$!"

Wawancara digunakan untuk mengetahui proses berpikir subjek selama menyelesaikan tes. Peneliti mengeksplorasi proses berpikir subjek dalam mengungkapkan setiap tahap pembuktian melalui wawancara secara mendalam. Wawancara juga digunakan sebagai triangulasi dalam penelitian kualitatif untuk mengetahui kesesuaian data yang diperoleh dari hasil tes tertulis dan wawancara. Triangulasi merupakan validitas dan reliabilitas dalam penelitian kualitatif (Cresswel, 2012)

Analisis data yang digunakan pada penelitian ini adalah analisis data kualitatif yang meliputi: transkrip data, reduksi data, menginterpretasi data, dan menarik kesimpulan. Peneliti mentranskrip data yang diperoleh dari hasil wawancara berbasis tes kemudian melakukan reduksi dengan cara memilih data yang sesuai dengan tujuan penelitian, sedangkan data yang tidak sesuai dengan tujuan penelitian

dipertimbangkan sebagai temuan. Interpretasi data dilakukan dengan cara memaparkan data yang diperoleh dari hasil reduksi data agar dapat ditarik kesimpulan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan hasil tes tertulis dan wawancara kepada subjek penelitian, dapat diketahui bahwa subjek memahami masalah yang akan dibuktikan dengan cara mengidentifikasi pernyataan yang akan dibuktikan terlebih dahulu. Subjek menyebutkan bahwa pernyataan yang terdapat pada instrument tes berupa kalimat bersyarat yang saling terkait, jika A memenuhi persamaan kedua, maka A juga memenuhi persamaan pertama. Persamaan pertama berbentuk $A^{-1} = 3I - A$ dan persamaan kedua berupa $A^2 - 3A + I = 0$ sehingga pembuktian dapat dilakukan dengan menggunakan salah satu persamaan karena jika membuktikan pernyataan pertama maka menghasilkan pernyataan kedua, begitupun sebaliknya. Dalam hal ini subjek memilih untuk membuktikan persamaan kedua, seperti pada transkrip wawancara berikut:

- P : Bagaimana cara anda memahami pernyataan yang akan anda buktikan?*
ST : Begini bu... di soal itu kan ada dua persamaan... terus saya disuruh menunjukkan bahwa $A^{-1} = 3I - A$ itu sama dengan $A^2 - 3A + I = 0$ dengan syarat jika A memenuhi persamaan kedua, maka A jugamemenuhi persamaan pertama. Kemudian saya buktikannya dari persamaan kedua yang berupa $A^2 - 3A + I = 0$

Subjek melakukan pembuktian pada pernyataan kedua dengan menggunakan konsep matriks identitas untuk mendapatkan $3.I = 3$ agar diperoleh $A(A - 3I) = -I$. Konsep matriks identitas yang digunakan subjek adalah "sebuah matriks identitas yang memiliki fungsi sama dalam aritmatika matriks, misalkan sebuah skalar a yang berperan dalam hubungan numerik $a.I = I.a = a$ ".

Kemudian subjek melakukan operasi aljabar pada langkah selanjutnya dengan menggunakan konsep invers pada bilangan real, akan tetapi konsep yang digunakan kurang tepat karena invers pada matriks tidak sama dengan invers pada bilangan real.

- P : kenapa bisa muncul $-3I = -\frac{I}{A}$*
ST : Iya bu. Ini saya menggunakan konsep invers untuk mendapatkan $A^{-1} = \frac{I}{A}$

Subjek mengidentifikasi pernyataan yang akan dibuktikan dengan menggunakan konsep matriks identitas, invers suatu matriks dan matriks skalar sebagai penjamin atau dasar untuk menguraikan setiap langkah pembuktian. Subjek menggunakan pengetahuannya tentang "jika $A.A^{-1} = I$ maka $A^{-1} = \frac{I}{A}$ " untuk mendapatkan kesimpulan yang berupa "terbukti bahwa suatu matriks bujur sangkar A memenuhi $A^2 - 3A + I = 0$ maka berlaku $A^{-1} = 3I - A$ ". Akan tetapi, subjek mengalami keraguan ketika menggunakan konsep pembagian bilangan real untuk menentukan $A^{-1} = \frac{I}{A}$ karena dia tidak pernah menemukan teorema atau definisi yang menyatakan bahwa invers pada matriks sama dengan invers pada operasi perkalian bilangan real.

Jika dilihat dari kesimpulan yang diberikan oleh subjek terlihat bahwa kesimpulannya benar, tetapi langkah-langkah pembuktiannya mengalami sedikit kesalahan karena dia menggunakan $A^{-1} = \frac{I}{A}$ untuk mendapatkan $A^{-1} = 3I - A$. Dalam hal ini, subjek menyangkal argumennya sendiri tentang operasi pembagian tidak berlaku untuk matriks. Penyangkal ini muncul karena subjek merasa ragu dengan penggunaan $-3I = -\frac{I}{A}$ dalam pembuktian yang telah dilakukan.

Berdasarkan hasil eksplorasi kepada subjek penelitian dapat diketahui bahwa subjek menggunakan dunia perwujudan untuk mengklasifikasikan informasi yang terdapat pada pernyataan menjadi beberapa objek. Kemudian menggunakan dunia simbolik untuk menentukan konsep matematika yang akan digunakan sebagai dasar untuk menguraikan pembuktian. Subjek menggunakan konsep invers matriks dan matriks identitas untuk menguraikan pembuktian dalam bentuk simbol-simbol aljabar. Dari pembuktian yang telah dilakukan subjek dapat diketahui bahwa ia membuktikan pernyataan melalui pembuktian secara formal karena pembuktian yang dilakukan menggunakan symbol-simbol aljabar yang bersifat umum.

Subjek dapat mengklasifikasikan menjadi beberapa objek karena ia melakukan identifikasi pernyataan sebagai langkah awal untuk memahami masalah. Identifikasi merupakan langkah awal yang perlu dilakukan oleh mahasiswa dalam memahami suatu permasalahan matematika (Astawa et al., 2018; Faizah et al., 2020a). Kemudian subjek menguraikan pembuktian dengan menggunakan konsep invers matrik. Akan tetapi pada saat melakukan tahap review atau pengecekan kembali, subjek ragu-ragu dengan penerapan konsep invers pada operasi perkalian bilangan real, sehingga subjek menyangkal argumennya bahwa operasi pembagian tidak berlaku untuk matriks. Penyangkal dalam suatu argument disebut sebagai rebuttal, sedangkan konsep matematika yang dijadikan dasar dalam menguraikan suatu pembuktian dapat disebut sebagai warrant (Simpson, 2015 Toulmin, 2003).

4. SIMPULAN DAN SARAN

Mahasiswa dengan kemampuan matematika tinggi melakukan proses berpikir matematis untuk menyelesaikan masalah pembuktian terkait invers suatu matriks melalui tiga tahapan. Tahap pertama, subjek menggunakan dunia perwujudan untuk mengklasifikasikan informasi yang diberikan menjadi beberapa objek. Tahap kedua, subjek menggunakan dunia simbolik untuk menentukan konsep matematika yang akan digunakan sebagai dasar untuk menguraikan pembuktian. Tahap terakhir, subjek membuat kesimpulan yang bersifat formal karena proses pembuktian yang telah dilakukan menggunakan symbol-simbol aljabar.

Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai rujukan untuk melakukan penelitian yang terkait dengan proses berpikir matematis yang terkait dengan pembuktian aljabar.

5. DAFTAR RUJUKAN

- [1] Astawa, I.W.P., Budayasa, I. K., & Juniati, D. (2018). The process of student cognition in constructing mathematical conjecture. *Journal on Mathematics Education*, 9(1), 15–25
- [2] Creswell, J. W. (2012). *Educational Research: Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research (4rd ed.)*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- [3] Pedagogical Knowledge of Prospective Teachers in Mathematics Learning Commognitive. *Journal for the Education of Gifted Young*. 8(1), 515-532.
- [4] Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics Education*, 40: 385–400
- [5] Solso, R. L., Maclin, O. H., & Maclin, M. K. (2007). *Psikologi Kognitif (Delapan)*. Jakarta: Erlangga
- [6] Simpson, A. (2015). The Anatomy of a Mathematical Proof: Implications For Analyses With Toulmin's Scheme. *Educational Studies in Mathematics*. Springer. 90(1), 1–17.
- [7] Sudirman, S., Subanji, S., Sutawidjaja, A., & Muksar, M. (2015). Proses Berpikir Mahasiswa dalam Mengonstruksi Konsep Komposisi Fungsi. *Jurnal Pendidikan Sains (JPS)*, 3(1), 158–168.
- [8] Subanji. (2011). *Teori Berpikir Pseudo Penalaran Kovarisional*. Malang: Universitas Negeri Malang
- [9] Tall, D. (2005f). The transition from embodied thought experiment. *Proceedings of Kingfisher Delta*, December, 23–35.
- [10] Tall, D. (2008e). *The Transition to Formal Thinking in Mathematics*. 20(2), 5–24
- [11] Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument: Updated edition*. The Uses of Argument: Updated Edition
- [12] Zayyadi, M., Nusantara, T., Hidayanto, E., Sulandra, I. M., & Sa'dijah, C. (2020). Content and Pedagogical Knowledge of Prospective Teachers in Mathematics Learning Commognitive. *Journal for the Education of Gifted Young*. 8(1), 515-532